Des référents historiques pour l'enseignement des limites dans le secondaire supérieur

Kévin Balhan (ULiège), Christophe Dubussy (UNamur), Pierre Job (ICHEC)

Congrès de la SBPM 2023

Le 23 août 2023

Plan de l'exposé

1) Un parcours historique en trois temps :
   - Les géomètres grecs.
   - Le calcul infinitésimal (*calculus*).
   - L'analyse contemporaine.

Plan de l'exposé

1) Un parcours historique en trois temps :
    - Les géomètres grecs.
    - Le calcul infinitésimal (*calculus*).
    - L'analyse contemporaine.
2) Etude comparative de deux définitions possibles pour les limites.

Plan de l'exposé

1) Un parcours historique en trois temps :
    - Les géomètres grecs.
    - Le calcul infinitésimal (*calculus*).
    - L'analyse contemporaine.
2) Etude comparative de deux définitions possibles pour les limites.
3) Quelques réflexions sur des points de programme actuels.

Pourquoi revenir à l'antiquité grecque ?

Les géomètres grecs

Pourquoi revenir à l'antiquité grecque ?

Parce que ce sont les problèmes de mesure de grandeurs (aires, volumes, centres de masse, ...) posés par les grecs ainsi que les solutions qu'ils tentèrent d'y apporter qui ont donné naissance au calculus et, à terme, au concept contemporain de limite. (Boyer, 1959)

Les géomètres grecs

Pourquoi revenir à l'antiquité grecque ?

Parce que ce sont les problèmes de mesure de grandeurs (aires, volumes, centres de masse, ...) posés par les grecs ainsi que les solutions qu'ils tentèrent d'y apporter qui ont donné naissance au calculus et, à terme, au concept contemporain de limite. (Boyer, 1959)

A partir des Pythagoriciens, il est surtout question de comparer les grandeurs entre-elles. Par exemple on peut démontrer qu'un cylindre peut contenir trois cônes de même base et même hauteur.

Les géomètres grecs

Pourquoi revenir à l'antiquité grecque ?

Parce que ce sont les problèmes de mesure de grandeurs (aires, volumes, centres de masse, ...) posés par les grecs ainsi que les solutions qu'ils tentèrent d'y apporter qui ont donné naissance au calculus et, à terme, au concept contemporain de limite. (Boyer, 1959)

A partir des Pythagoriciens, il est surtout question de comparer les grandeurs entre-elles. Par exemple on peut démontrer qu'un cylindre peut contenir trois cônes de même base et même hauteur.

S'en suivent les fameux problèmes de *quadrature* : Peut-on à partir d'une surface construire un carré de même aire ?

Quadrature relative et proportions

Face à la difficulté (voire l'impossibilité, cf. la quadrature du cercle) de produire des quadratures exactes avec les moyens de l'époque, les grecs se sont tournés vers des problèmes de quadrature relative. Un exemple est donné avec la proposition 2 du livre 12 des éléments d'Euclide :

"Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres".

Quadrature relative et proportions

Face à la difficulté (voire l'impossibilité, cf. la quadrature du cercle) de produire des quadratures exactes avec les moyens de l'époque, les grecs se sont tournés vers des problèmes de quadrature relative. Un exemple est donné avec la proposition 2 du livre 12 des éléments d'Euclide :

"Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres".

Cet énoncé sous-entend une certaine théorie des proportions, qui a connu plusieurs évolutions dans le monde grec. Euclide fait ici appel à l'axiomatisation d'Eudoxe : **Deux rapports sont égaux s'ils se comportent de manière analogue face aux rapports de naturels.**

Quadrature relative et proportions II

Euclide ne dit jamais précisément ce qu'est "un rapport". Dans le livre 5 de ses *éléments* on peut lire *"Un rapport est une relation entre les tailles de deux grandeurs de même type"*.

Quadrature relative et proportions II

Euclide ne dit jamais précisément ce qu'est "un rapport". Dans le livre 5 de ses *éléments* on peut lire *"Un rapport est une relation entre les tailles de deux grandeurs de même type"*.

Bien que fastidieuse à mettre en place, la théorie des rapports employées par Euclide permet des calculs similaires à ceux effectués dans $\mathbb{Q}$ mais il est important de rappeler que les grecs ne fondent pas leur theorie sur les nombres rationnels mais sur des comparaisons de naturels.

Quadrature relative et proportions II

Euclide ne dit jamais précisément ce qu'est "un rapport". Dans le livre 5 de ses *éléments* on peut lire *"Un rapport est une relation entre les tailles de deux grandeurs de même type"*.

Bien que fastidieuse à mettre en place, la théorie des rapports employées par Euclide permet des calculs similaires à ceux effectués dans $\mathbb{Q}$ mais il est important de rappeler que les grecs ne fondent pas leur theorie sur les nombres rationnels mais sur des comparaisons de naturels.

Nous traduisons avec des symboles plus contemporains la proposition 2 du livre 12 des éléments d'Euclide. Si C_1 et C_2 sont deux disques de diamètre respectif d_1 et d_2 alors

$$C_1 : C_2 \approx d_1^2 : d_2^2.$$

La méthode d'exhaustion

Pour démontrer cette proposition, Euclide utilise une méthode d'exhaustion, consistant à passer en revue les trois cas possibles :

1) Soit il existe des cercles tels que $C_1 : C_2 > d_1^2 : d_2^2$.
2) Soit il existe des cercles tels que $C_1 : C_2 < d_1^2 : d_2^2$.
3) Soit

$$C_1 : C_2 \approx d_1^2 : d_2^2$$

quelque soient les cercles considérés.

La méthode d'exhaustion

Pour démontrer cette proposition, Euclide utilise une méthode d'exhaustion, consistant à passer en revue les trois cas possibles :

1) Soit il existe des cercles tels que $C_1 : C_2 > d_1^2 : d_2^2$.
2) Soit il existe des cercles tels que $C_1 : C_2 < d_1^2 : d_2^2$.
3) Soit

$$C_1 : C_2 \approx d_1^2 : d_2^2$$

quelque soient les cercles considérés.

Via **une double preuve par l'absurde**, il montre alors que 1) et 2) mènent à une contradiction, ce qui permet de valider 3).

La méthode d'exhaustion

Pour démontrer cette proposition, Euclide utilise une méthode d'exhaustion, consistant à passer en revue les trois cas possibles :

1) Soit il existe des cercles tels que $C_1 : C_2 > d_1^2 : d_2^2$.
2) Soit il existe des cercles tels que $C_1 : C_2 < d_1^2 : d_2^2$.
3) Soit

$$C_1 : C_2 \approx d_1^2 : d_2^2$$

quelque soient les cercles considérés.

Via **une double preuve par l'absurde**, il montre alors que 1) et 2) mènent à une contradiction, ce qui permet de valider 3).

La paternité de cette technique est à nouveau due à Eudoxe. Elle est la représentante emblématique du niveau de rigueur attendu par les grecs pour valider pareils résultats.

La méthode d'exhaustion II

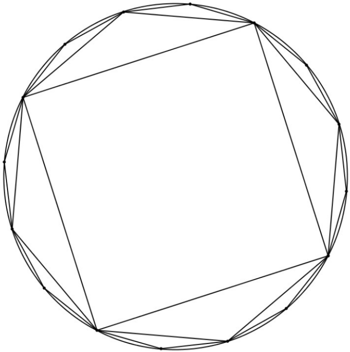
La clé dans la preuve par l'absurde d'Euclide réside dans la construction d'une suite de polygones réguliers $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ emboîtés à C_2 tels que

- P_1 est un carré.
- Pour tout $n \geq 1$, le polygone P_{n+1} est obtenu à partir de P_n en doublant ses côtés.

La méthode d'exhaustion II

La clé dans la preuve par l'absurde d'Euclide réside dans la construction d'une suite de polygones réguliers $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ emboîtés à C_2 tels que

- P_1 est un carré.
- Pour tout $n \geq 1$, le polygone P_{n+1} est obtenu à partir de P_n en doublant ses côtés.



La méthode d'exhaustion III

Cette construction étant réalisée, Euclide utilise la propriété cruciale suivante : Qu'elle que soit la surface S telle que $S < C_2$ il existe $n \geq 1$ tel que $S < P_n < C_2$.

La méthode d'exhaustion III

Cette construction étant réalisée, Euclide utilise la propriété cruciale suivante : Qu'elle que soit la surface S telle que $S < C_2$ il existe $n \geq 1$ tel que $S < P_n < C_2$.

Si l'on prenait le temps de rigoureusement formaliser cette propriété, on obtiendrait un énoncé exprimant l'idée que la suite des aires des polygones converge vers l'aire du disque.

La méthode d'exhaustion III

Cette construction étant réalisée, Euclide utilise la propriété cruciale suivante : Qu'elle que soit la surface S telle que $S < C_2$ il existe $n \geq 1$ tel que $S < P_n < C_2$.

Si l'on prenait le temps de rigoureusement formaliser cette propriété, on obtiendrait un énoncé exprimant l'idée que la suite des aires des polygones converge vers l'aire du disque.

Euclide démontre cette propriété en utilisant l'axiome d'Archimède : Si une grandeur x est supérieure à une grandeur y, elle peut être subdivisée un certain nombre de fois de telle sorte que les subdivisions soient inférieures à y. En langage contemporain :

$$\forall x \forall y \exists n \in \mathbb{N} : x < ny.$$

La méthode d'exhaustion IV

Archimède va un cran plus loin en montrant que $C_1 : C_2 \approx r_1^2 : r_2^2$ où r_1 (resp. r_2) est le rayon de C_1 (resp. C_2) et en cherchant à approximer la valeur de ce rapport de proportionnalité.

La méthode d'exhaustion IV

Archimède va un cran plus loin en montrant que $C_1 : C_2 \approx r_1^2 : r_2^2$ où r_1 (resp. r_2) est le rayon de C_1 (resp. C_2) et en cherchant à approximer la valeur de ce rapport de proportionnalité.

En construisant suffisamment de polygones inscrits et circonscrits il montre que ce rapport est compris entre $3 + 10 : 71$ et $3 + 1 : 7$. En langage contemporain, on écrirait

$$3,14 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3,143.$$

La méthode d'exhaustion IV

Archimède va un cran plus loin en montrant que $C_1 : C_2 \approx r_1^2 : r_2^2$ où r_1 (resp. r_2) est le rayon de C_1 (resp. C_2) et en cherchant à approximer la valeur de ce rapport de proportionnalité.

En construisant suffisamment de polygones inscrits et circonscrits il montre que ce rapport est compris entre $3 + 10 : 71$ et $3 + 1 : 7$. En langage contemporain, on écrirait

$$3,14 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3,143.$$

Ceci a poussé certains auteurs comme (Knorr, 1982) a attribué la paternité du concept de limite aux grecs.

Méthode d'exhaustion VS concept de limite

- La méthode d'exhaustion permet de valider un résultat prédit à l'avance par une heuristique de nature géométrique. Elle sert donc à effectuer la *synthèse* d'un résultat. Les grecs conduisaient *l'analyse* par d'autres moyens dont il ne reste que peu de traces. (Job, 2011)

Méthode d'exhaustion VS concept de limite

- La méthode d'exhaustion permet de valider un résultat prédit à l'avance par une heuristique de nature géométrique. Elle sert donc à effectuer la *synthèse* d'un résultat. Les grecs conduisaient *l'analyse* par d'autres moyens dont il ne reste que peu de traces. (Job, 2011)

- La rédaction des preuves grecques évite soigneusement toute mention de l'infini. Au mieux l'infini est *potentiel* (autrement dit on peut aller aussi loin que l'on veut dans la subdivision) et non pas *actuel* comme lorsqu'on considère une suite comme étant un objet contenant une infinité de termes.

Méthode d'exhaustion VS concept de limite

• La méthode d'exhaustion permet de valider un résultat prédit à l'avance par une heuristique de nature géométrique. Elle sert donc à effectuer la *synthèse* d'un résultat. Les grecs conduisaient *l'analyse* par d'autres moyens dont il ne reste que peu de traces. (Job, 2011)

• La rédaction des preuves grecques évite soigneusement toute mention de l'infini. Au mieux l'infini est *potentiel* (autrement dit on peut aller aussi loin que l'on veut dans la subdivision) et non pas *actuel* comme lorsqu'on considère une suite comme étant un objet contenant une infinité de termes.

• Chaque problème requiérait une rédaction inédite de la double preuve par l'absurde. La procédure était donc couteuse et non automatisée. (La preuve par l'absurde sera incorporée à posteriori dans le théorème d'unicité de la limite.)

Passage au calcul infinitésimal

A l'époque moderne, l'abandon de la méthode d'exhaustion au profit du calcul infinitésimal se produit pour plusieurs raisons :

Passage au calcul infinitésimal

A l'époque moderne, l'abandon de la méthode d'exhaustion au profit du calcul infinitésimal se produit pour plusieurs raisons :

1) Les philosophes scholastiques ont dépassé les tabous des grecs en réfléchissant à la notion d'infini actuel et à l'existence des indivisibles, ouvrant le champ à la considération de notions infinitésimales.

Passage au calcul infinitésimal

A l'époque moderne, l'abandon de la méthode d'exhaustion au profit du calcul infinitésimal se produit pour plusieurs raisons :

1) Les philosophes scholastiques ont dépassé les tabous des grecs en réfléchissant à la notion d'infini actuel et à l'existence des indivisibles, ouvrant le champ à la considération de notions infinitésimales.
2) Le développement de l'algèbre et du raisonnement symbolique (notamment par Viète) permet de prendre de la hauteur par rapport aux considérations purement géométriques.

Passage au calcul infinitésimal

A l'époque moderne, l'abandon de la méthode d'exhaustion au profit du calcul infinitésimal se produit pour plusieurs raisons :

1) Les philosophes scholastiques ont dépassé les tabous des grecs en réfléchissant à la notion d'infini actuel et à l'existence des indivisibles, ouvrant le champ à la considération de notions infinitésimales.
2) Le développement de l'algèbre et du raisonnement symbolique (notamment par Viète) permet de prendre de la hauteur par rapport aux considérations purement géométriques.
3) Ceci a en partie permi de réaliser que les problèmes de quadrature, de vitesse instantanée, de détermination de tangentes ou de maximum/minimum étaient tous liés entre eux.

Passage au calcul infinitésimal II

4) La méthode d'exhaustion et la double preuve par l'absurde sont lourdes et peu maléables. Les mathématiciens modernes sont moins concernés par l'idée du validation rigoureuse que par la production de nouveaux résultats et le développement d'outils performants pour les produire.

Passage au calcul infinitésimal II

4) La méthode d'exhaustion et la double preuve par l'absurde sont lourdes et peu maléables. Les mathématiciens modernes sont moins concernés par l'idée du validation rigoureuse que par la production de nouveaux résultats et le développement d'outils performants pour les produire.

"Pour obtenir la confiance des experts, il n'est pas très important que nous donnions une démonstration absolue. Je suis prêt à admettre qu'elle doit apparaître sous une forme claire, élégante et ingénieuse, comme dans toutes les œuvres d'Archimède. Mais le plus important est le mode de découverte lui-même car c'est que les hommes de science aiment à connaître. Il semble donc que nous devions avant tout suivre la méthode qui permet de le comprendre et de le présenter de la manière la plus concise et la plus claire. Nous nous épargnons ainsi le travail d'écrire, et les autres celui de lire - ces autres qui n'ont pas le temps de prendre connaissance de l'énorme quantité d'inventions géométriques qui augmentent de jour en jour et qui, dans ce siècle savant, semblent croître au-delà des limites s'ils doivent utiliser la méthode prolixe et parfaite des Anciens."

Citation de Huygens dans (Edwards, 1982).

Passage au calcul infinitésimal III

5) Bien que les fondations du calculus soient incertaines, l'emphase mise sur l'heuristique est encouragée, car les résultats obtenus à partir des notions infinitésimales ne conduisent globalement à aucune contradiction majeure. (Grabiner, 2005)

Passage au calcul infinitésimal III

5) Bien que les fondations du calculus soient incertaines, l'emphase mise sur l'heuristique est encouragée, car les résultats obtenus à partir des notions infinitésimales ne conduisent globalement à aucune contradiction majeure. (Grabiner, 2005)
6) Les résultats obtenus par ces méthodes sont en accord avec ceux obtenus par les grecs ce qui amène à penser qu'elles sont en réalité des "raccourcis" de la méthode d'exhaustion.

Passage au calcul infinitésimal III

5) Bien que les fondations du calculus soient incertaines, l'emphase mise sur l'heuristique est encouragée, car les résultats obtenus à partir des notions infinitésimales ne conduisent globalement à aucune contradiction majeure. (Grabiner, 2005)
6) Les résultats obtenus par ces méthodes sont en accord avec ceux obtenus par les grecs ce qui amène à penser qu'elles sont en réalité des "raccourcis" de la méthode d'exhaustion.
7) L'aboutissement des techniques infinitésimales – *le calcul différentiel de Newton et Leibniz* – donne lieu à un outil de calcul unifié et automatisé pour tous les problèmes se posant à l'époque.

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales

Le mathématicien Pierre de Fermat (1607-1665) utilise une méthode dite *"d'adégualité"* pour déterminer les extrema d'une fonction.

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales

Le mathématicien Pierre de Fermat (1607-1665) utilise une méthode dite *"d'adégualité"* pour déterminer les extrema d'une fonction.

L'idée est à peu près la suivante : Soit f une fonction dont on cherche les extrema. Si x est un tel extrema alors les variations de f sont faibles aux alentours de x. Par conséquent si $x + e$ est adégual (i.e. infiniment proche) de x alors $f(x+e)$ est adégual à $f(x)$. En écrivant explicitant l'adégualité $f(x + e) \approx f(x)$, en simplifiant par la plus haute puissance de e possible et en faisant finalement disparaitre tous les termes en e, on est amené à résoudre une équation algébrique permettant de trouver la valeur de x.

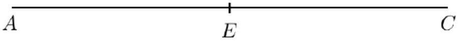
Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales

Le mathématicien Pierre de Fermat (1607-1665) utilise une méthode dite *"d'adégualité"* pour déterminer les extrema d'une fonction.

L'idée est à peu près la suivante : Soit f une fonction dont on cherche les extrema. Si x est un tel extrema alors les variations de f sont faibles aux alentours de x. Par conséquent si $x + e$ est adégual (i.e. infiniment proche) de x alors $f(x+e)$ est adégual à $f(x)$. En écrivant explicitant l'adégualité $f(x + e) \approx f(x)$, en simplifiant par la plus haute puissance de e possible et en faisant finalement disparaitre tous les termes en e, on est amené à résoudre une équation algébrique permettant de trouver la valeur de x.

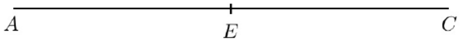
La technique fonctionne bien car les mathématiciens de l'époque ne travaillent qu'avec des fonctions polynomiales ou des séries de puissances naturelles se comportant comme des polynômes infinis.

Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales II

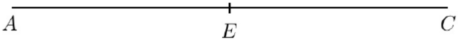
Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$ et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales II

Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.

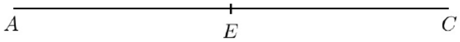


Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$ et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Il doit être adégualé au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales II

Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



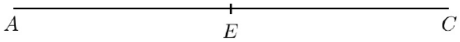
Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$ et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Il doit être adégualé au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Supprimant les termes communs : $be \approx 2ae + e^2$.

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales II

Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



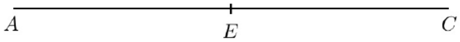
Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$ et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Il doit être adégualé au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Supprimant les termes communs : $be \approx 2ae + e^2$. Divisant tous les termes : $b \approx 2a + e$.

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales II

Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



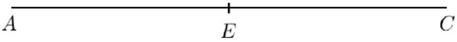
Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$ et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Il doit être adégualé au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Supprimant les termes communs : $be \approx 2ae + e^2$. Divisant tous les termes : $b \approx 2a + e$. Supprimer le e : $b = 2a$.

Un exemple de calcul via des techniques infinitésimales II

Soit à partager le segment AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



Posons $AC = b$; soit a un de ses segments, l'autre sera $b - a$ et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Il doit être adégualé au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

Supprimant les termes communs : $be \approx 2ae + e^2$. Divisant tous les termes : $b \approx 2a + e$. Supprimer le e : $b = 2a$. Pour résoudre ce problème, il faut donc prendre la moitié de b. Il est impossible de donner une méthode plus générale. (Oeuvre de Fermat 1896, vol. III, p.122.)

Une évolution progressive vers la notion de limite

- Bien qu'en retrait durant la période infinitésimale, le concept de limite apparait à plusieurs reprises en arrière plan. On peut observer des changements d'attitude lents et subtils chez bon nombre de mathématiciens.

Une évolution progressive vers la notion de limite

- Bien qu'en retrait durant la période infinitésimale, le concept de limite apparait à plusieurs reprises en arrière plan. On peut observer des changements d'attitude lents et subtils chez bon nombre de mathématiciens.
- Alors que le concept de limite contemporain s'apparente davantage à un infini potentiel, c'est paradoxalement le concept d'infini actuel, fort développé durant la période infinitésimale, qui permettra au concept de limite d'émerger.

Une évolution progressive vers la notion de limite

- Bien qu'en retrait durant la période infinitésimale, le concept de limite apparait à plusieurs reprises en arrière plan. On peut observer des changements d'attitude lents et subtils chez bon nombre de mathématiciens.
- Alors que le concept de limite contemporain s'apparente davantage à un infini potentiel, c'est paradoxalement le concept d'infini actuel, fort développé durant la période infinitésimale, qui permettra au concept de limite d'émerger.

Illustrons ces propos en passant en revue les visions de 4 mathématiciens de la période infinitésimale.

Simon Stevin (1548-1620 ; Pays-Bas)

Stevin se départ de la double preuve par l'absurde mais conserve l'idée Archimédienne selon laquelle l'aire du disque peut être approchée aussi près que l'on veut par une suite de figures polygonales.

Simon Stevin (1548-1620 ; Pays-Bas)

Stevin se départ de la double preuve par l'absurde mais conserve l'idée Archimédienne selon laquelle l'aire du disque peut être approchée aussi près que l'on veut par une suite de figures polygonales.

Se faisant, Stevin met en évidence que la possibilité **"d'approcher aussi près que l'on veut"** se suffit à elle-même. (Boyer, 1959) considère que Stevin ouvre la possibilité d'extirper la concept de limite hors de la méthode d'exhaustion des grecs.

Simon Stevin (1548-1620 ; Pays-Bas)

Stevin se départ de la double preuve par l'absurde mais conserve l'idée Archimédienne selon laquelle l'aire du disque peut être approchée aussi près que l'on veut par une suite de figures polygonales.

Se faisant, Stevin met en évidence que la possibilité **"d'approcher aussi près que l'on veut"** se suffit à elle-même. (Boyer, 1959) considère que Stevin ouvre la possibilité d'extirper la concept de limite hors de la méthode d'exhaustion des grecs.

Néanmoins, on ne peut lui attribuer la paternité du concept de limite. En effet, sans les démonstrations formelles des grecs, Stevin doute lui-même de la validité de ses résultats. Sa méthode est alors plutôt considérée comme une "illustration" que comme un substitut rigoureux à la méthode grecque.

Luca Valerio (1552-1618 ; Italie)

Valerio tente de donner une plus grande instrumentalité à la méthode d'exhaustion en déterminant des conditions suffisantes pour qu'elle puisse s'appliquer. De cette façon, il n'est pas nécéssaire de réécrire une preuve complète pour chaque problème.

Luca Valerio (1552-1618 ; Italie)

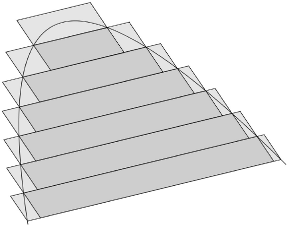
Valerio tente de donner une plus grande instrumentalité à la méthode d'exhaustion en déterminant des conditions suffisantes pour qu'elle puisse s'appliquer. De cette façon, il n'est pas nécéssaire de réécrire une preuve complète pour chaque problème.

Il affirme que, dans une figure dont les longueurs des diamètres peuvent être rendus aussi petits que l'on souhaite, on peut inscrire et circonscrire deux suites de polygones, de sorte que la différence entre les deux suites puisse être rendue arbitrairement petite.

Luca Valerio (1552-1618 ; Italie)

Valerio tente de donner une plus grande instrumentalité à la méthode d'exhaustion en déterminant des conditions suffisantes pour qu'elle puisse s'appliquer. De cette façon, il n'est pas nécéssaire de réécrire une preuve complète pour chaque problème.

Il affirme que, dans une figure dont les longueurs des diamètres peuvent être rendus aussi petits que l'on souhaite, on peut inscrire et circonscrire deux suites de polygones, de sorte que la différence entre les deux suites puisse être rendue arbitrairement petite.



Luca Valerio (1552-1618 ; Italie) II

En langage contemporain, on écrirait ceci : Pour toute figure F satisfaisant une certaine hypothèse de régularité sur ses diamètres, on peut construire une suite de polygones inscrits $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et une suite de polygones circonscrits $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tels que

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists n \geq 1 : \mathrm{Aire}(C_n) - \mathrm{Aire}(I_n) < \varepsilon.$$

De ceci, il conclut que l'aire de la figure peut être approchée aussi près que l'on veut par $\mathrm{Aire}(C_n)$ et $\mathrm{Aire}(I_n)$.

Luca Valerio (1552-1618 ; Italie) II

En langage contemporain, on écrirait ceci : Pour toute figure F satisfaisant une certaine hypothèse de régularité sur ses diamètres, on peut construire une suite de polygones inscrits $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et une suite de polygones circonscrits $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tels que

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists n \geq 1 : \mathrm{Aire}(C_n) - \mathrm{Aire}(I_n) < \varepsilon.$$

De ceci, il conclut que l'aire de la figure peut être approchée aussi près que l'on veut par Aire(C_n) et Aire(I_n).

Valerio ne propose pas réellement de définition du concept de limite mais applique un théorème, similaire au théorème du sandwich, permettant d'affirmer l'existence d'un phénomène limite.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667 ; Pays-Bas)

De Saint-Vincent continue dans la direction ouverte par Steven et Valerio en tentant de développer des théorèmes permettant de se passer de la double preuve par l'absurde.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667 ; Pays-Bas)

De Saint-Vincent continue dans la direction ouverte par Steven et Valerio en tentant de développer des théorèmes permettant de se passer de la double preuve par l'absurde.

Il va cependant plus loin en intègrant les réflexions scolastiques sur l'infini et le continu, donnant crédit à la notion d'infini actuel. Il considère, par exemple, que l'aire du cercle est véritablement "épuisée" par la suite des aires des polygones inscrits. (Boyer, 1959)

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667 ; Pays-Bas)

De Saint-Vincent continue dans la direction ouverte par Steven et Valerio en tentant de développer des théorèmes permettant de se passer de la double preuve par l'absurde.

Il va cependant plus loin en intègrant les réflexions scolastiques sur l'infini et le continu, donnant crédit à la notion d'infini actuel. Il considère, par exemple, que l'aire du cercle est véritablement "épuisée" par la suite des aires des polygones inscrits. (Boyer, 1959)

Cette approche actuelle de l'infini l'autorise, sans doute pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, à parler de la somme d'une série infinie et, se faisant, à **nommer** l'objet que nous appelons aujourd'hui limite.

d'Alembert (1717-1783 ; France)

D'Alembert, après analyse des oeuvres de Newton et Leibniz, en vient à penser que la véritable "métaphysique" du calcul différentiel repose sur la notion de limite. Il définit la notion comme suit :

"On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, ***sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche****; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. [...]* ***À proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite****; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra."*

d'Alembert (1717-1783 ; France) II

Bien qu'exprimée dans un langage discursif, la définition est incroyablement proche de celle des analystes contemporains. Seules les contraintes "jamais surpasser" et "jamais égale" sont en trop puisque, par exemple,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

alors que la fonction prend la valeur 0 une infinité de fois.

d'Alembert (1717-1783 ; France) II

Bien qu'exprimée dans un langage discursif, la définition est incroyablement proche de celle des analystes contemporains. Seules les contraintes "jamais surpasser" et "jamais égale" sont en trop puisque, par exemple,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

alors que la fonction prend la valeur 0 une infinité de fois.

Dans la foulée, d'Alembert se sert de sa notion de limite pour calculer des tangentes et démontre deux théorèmes :

- L'unicité de la limite.
- La limite d'un produit est égale au produit des limites.

d'Alembert (1717-1783 ; France) III

D'Alembert clame le rôle central de la notion de limite et ébauche sa constitution comme concept fondateur du calculus. Cependant, tout ceci reste à l'état de déclaration d'intentions car d'Alembert écrit très peu sur le sujet et laisse le soin aux autres d'effectuer le travail.

d'Alembert (1717-1783 ; France) III

D'Alembert clame le rôle central de la notion de limite et ébauche sa constitution comme concept fondateur du calculus. Cependant, tout ceci reste à l'état de déclaration d'intentions car d'Alembert écrit très peu sur le sujet et laisse le soin aux autres d'effectuer le travail.

Il affirme notamment que les infinitésimaux sont des fictions utiles et que, in fine, tout calcul les utilisant peut être réécrit plus rigoureusements avec des limites.

d'Alembert (1717-1783 ; France) III

D'Alembert clame le rôle central de la notion de limite et ébauche sa constitution comme concept fondateur du calculus. Cependant, tout ceci reste à l'état de déclaration d'intentions car d'Alembert écrit très peu sur le sujet et laisse le soin aux autres d'effectuer le travail.

Il affirme notamment que les infinitésimaux sont des fictions utiles et que, in fine, tout calcul les utilisant peut être réécrit plus rigoureusements avec des limites.

D'Alembert avait donc en quelque sorte tout en main mais ne franchit pas le pas. On peut au moins y voir deux raisons :

d'Alembert (1717-1783 ; France) III

D'Alembert clame le rôle central de la notion de limite et ébauche sa constitution comme concept fondateur du calculus. Cependant, tout ceci reste à l'état de déclaration d'intentions car d'Alembert écrit très peu sur le sujet et laisse le soin aux autres d'effectuer le travail.

Il affirme notamment que les infinitésimaux sont des fictions utiles et que, in fine, tout calcul les utilisant peut être réécrit plus rigoureusements avec des limites.

D'Alembert avait donc en quelque sorte tout en main mais ne franchit pas le pas. On peut au moins y voir deux raisons :

- Son activité est essentiellement celle d'un philosophe. Son but est surtout de débroussailler de nouveaux chemins plutôt que de s'occuper des détails.

d'Alembert (1717-1783 ; France) III

D'Alembert clame le rôle central de la notion de limite et ébauche sa constitution comme concept fondateur du calculus. Cependant, tout ceci reste à l'état de déclaration d'intentions car d'Alembert écrit très peu sur le sujet et laisse le soin aux autres d'effectuer le travail.

Il affirme notamment que les infinitésimaux sont des fictions utiles et que, in fine, tout calcul les utilisant peut être réécrit plus rigoureusements avec des limites.

D'Alembert avait donc en quelque sorte tout en main mais ne franchit pas le pas. On peut au moins y voir deux raisons :

- Son activité est essentiellement celle d'un philosophe. Son but est surtout de débroussailler de nouveaux chemins plutôt que de s'occuper des détails.
- Il n'utilise pas le concept de fonction et ne parle que de limites de "quantités" ce qui rend ses arguments très éloignés de ceux des analystes.

Du calculus vers l'analyse

1) Les progrès réalisés en algèbre permettent à une nouvelle notion mathématique d'émerger, la notion de fonction.

Du calculus vers l'analyse

1) Les progrès réalisés en algèbre permettent à une nouvelle notion mathématique d'émerger, la notion de fonction.
2) Cette émergence permet de reformuler les problématiques géométrique et physique, d'où le calculus est issu, de manière interne aux mathématiques, ce qui permet d'envisager le calculus comme discipline autonome (l'analyse) sur laquelle seraient fondées la géométrie et la physique, renversant ainsi l'ordre jusqu'alors établi. (Job, 2011)

Du calculus vers l'analyse

1) Les progrès réalisés en algèbre permettent à une nouvelle notion mathématique d'émerger, la notion de fonction.
2) Cette émergence permet de reformuler les problématiques géométrique et physique, d'où le calculus est issu, de manière interne aux mathématiques, ce qui permet d'envisager le calculus comme discipline autonome (l'analyse) sur laquelle seraient fondées la géométrie et la physique, renversant ainsi l'ordre jusqu'alors établi. (Job, 2011)
3) Il faut donc pouvoir justifier le calculus avec un niveau de rigueur égal à celui des grecs, mais sans avoir recours à la méthode fastidieuse de la double preuve par l'absurde.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France)

Lagrange acte l'efficacité du calcul infinitésimal mais considère qu'il repose sur des fondations branlantes.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France)

Lagrange acte l'efficacité du calcul infinitésimal mais considère qu'il repose sur des fondations branlantes.

D'un autre côté, la théorie des limites telle qu'elle commence déjà à émerger avec d'Alembert lui semble **trop complexe que pour pouvoir être enseignée à des débutants**.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France)

Lagrange acte l'efficacité du calcul infinitésimal mais considère qu'il repose sur des fondations branlantes.

D'un autre côté, la théorie des limites telle qu'elle commence déjà à émerger avec d'Alembert lui semble **trop complexe que pour pouvoir être enseignée à des débutants**.

Suite à l'obtention d'un poste d'enseignant à l'école polytechnique, il écrit un traité intitulé "*Théorie des fonctions analytiques*" dans lequel **il fait reposer l'étude des phénomènes limites sur des considérations purement algébriques**. Autrement dit, il se restreint à étudier des polynômes et des séries de puissances naturelles (i.e. des polynômes infinis.)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France) II

Lagrange est particulièrement explicite concernant le but recherché : *"la théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du calcul différentiel,* ***dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou de limites****, et je démontrerai par cette théorie le théorème de Taylor, qu'on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites."*

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France) II

Lagrange est particulièrement explicite concernant le but recherché : *"la théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du calcul différentiel, **dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou de limites**, et je démontrerai par cette théorie le théorème de Taylor, qu'on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites."*

Malheureusement sa démonstration "purement algébrique" du théorème de Taylor échoue pour au moins deux raisons :

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France) II

Lagrange est particulièrement explicite concernant le but recherché : *"la théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du calcul différentiel, **dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou de limites**, et je démontrerai par cette théorie le théorème de Taylor, qu'on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites."*

Malheureusement sa démonstration "purement algébrique" du théorème de Taylor échoue pour au moins deux raisons :

- Il admet le TVI sans le démontrer.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France) II

Lagrange est particulièrement explicite concernant le but recherché : *"la théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du calcul différentiel,* ***dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou de limites****, et je démontrerai par cette théorie le théorème de Taylor, qu'on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites."*

Malheureusement sa démonstration "purement algébrique" du théorème de Taylor échoue pour au moins deux raisons :

- Il admet le TVI sans le démontrer.
- A un certain moment, il considère qu'une fonction $i \mapsto V(i)$ **s'évanouit** avec i ce qui signifie aujourd'hui que $\lim_{i \to 0} V(i) = 0$. Il n'arrive donc pas totalement à faire disparaitre la notion de limite.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France)

Cauchy est au fait des travaux de Lagrange car son père le connaissait personnellement et celui-ci a soutenu Cauchy lors de ses études. Dugac (2003) relate que Cauchy a emporté le *"Traité des fonctions analytiques"* pour son premier poste à Cherbourg en 1810.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France)

Cauchy est au fait des travaux de Lagrange car son père le connaissait personnellement et celui-ci a soutenu Cauchy lors de ses études. Dugac (2003) relate que Cauchy a emporté le *"Traité des fonctions analytiques"* pour son premier poste à Cherbourg en 1810.

Cependant, Cauchy note les failles du paradigme lagrangien. Il étudie notamment la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et démontre qu'elle n'est pas égale à sa série de Taylor. Elle échappe donc aux considérations algébriques de Lagrange.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) II

Cauchy devient aussi professeur à l'école Polytechnique et souhaite utiliser le concept de limite qu'il définit comme suit : *"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus."* (1821)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) II

Cauchy devient aussi professeur à l'école Polytechnique et souhaite utiliser le concept de limite qu'il définit comme suit : *"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus."* (1821)

Cette définition continue de faire appel à des notions géométriques et cinématiques. Des expressions telles que "s'approchent indéfiniment" laissent penser que Cauchy reste dans une perspective infinitésimale.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) III

Ceci est confirmé par la définition que Cauchy donne de la continuité : "Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Si, en partant d'une valeur de x, on attribue à la variable x un accroissement **infiniment petit** α, la fonction recevra elle-même pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α."

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) III

Ceci est confirmé par la définition que Cauchy donne de la continuité : "Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Si, en partant d'une valeur de x, on attribue à la variable x un accroissement **infiniment petit** α, la fonction recevra elle-même pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α."

L'utilisation d'infinitésimaux par Cauchy pourrait n'être qu'un leurre. Gilain (1989) souligne que la présence du langage infinitésimal est une concession faite suite à des pressions exercées à différents niveaux.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) IV

Pour y voir plus clair, il vaut donc mieux regarder la façon dont Cauchy utilise la notion limite dans ses écrits.

Pour y voir plus clair, il vaut donc mieux regarder la façon dont Cauchy utilise la notion limite dans ses écrits.

Cauchy définit la dérivée comme étant la limite

$$\lim_{i \to 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Pour y voir plus clair, il vaut donc mieux regarder la façon dont Cauchy utilise la notion limite dans ses écrits.

Cauchy définit la dérivée comme étant la limite

$$\lim_{i \to 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Dans sa démonstration du théorème de Lagrange (Taylor à l'ordre 1), il traduit cette définition de la façon suivante : "Désignons par δ et ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques i inférieures à δ, et pour une valeur quelconque de x comprise entre x_0 et X, le rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ reste toujours supérieur à $f'(x) - \varepsilon$ et inférieur à $f'(x) + \varepsilon$.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) V

Par "valeurs numériques", Cauchy entend la valeur absolue de i. C'est d'ailleurs lui qui introduit la notation $|i|$. Avec les notations actuelles, Cauchy affirme donc que pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ de sorte que si $|i| < \delta$ alors pour tout $x \in [x_0, X]$

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+i) - f(x)}{i} < f'(x) + \varepsilon.$$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) V

Par "valeurs numériques", Cauchy entend la valeur absolue de i. C'est d'ailleurs lui qui introduit la notation $|i|$. Avec les notations actuelles, Cauchy affirme donc que pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ de sorte que si $|i| < \delta$ alors pour tout $x \in [x_0, X]$

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+i) - f(x)}{i} < f'(x) + \varepsilon.$$

Dans **ses preuves**, les connotations cinématiques et infinitésimales disparaissent donc complètement au profit d'une définition très contemporaine de la notion de limite.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France) V

Par "valeurs numériques", Cauchy entend la valeur absolue de i. C'est d'ailleurs lui qui introduit la notation $|i|$. Avec les notations actuelles, Cauchy affirme donc que pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ de sorte que si $|i| < \delta$ alors pour tout $x \in [x_0, X]$

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+i) - f(x)}{i} < f'(x) + \varepsilon.$$

Dans **ses preuves**, les connotations cinématiques et infinitésimales disparaissent donc complètement au profit d'une définition très contemporaine de la notion de limite.

Les encadrements et les raisonnements à coup de $\varepsilon - \delta$ sont donc conçus par Cauchy comme étant des outils de démonstration. L'épistémologue Imre Lakatos parle de **proof-generated concept**.

Karl Weierstrass (1815-1897 ; Allemagne)

Quelques années plus tard, Weierstass donne une définition du concept de limite, suffisamment explicite pour figurer dans un manuel d'analyse contemporain.

Karl Weierstrass (1815-1897 ; Allemagne)

Quelques années plus tard, Weierstass donne une définition du concept de limite, suffisamment explicite pour figurer dans un manuel d'analyse contemporain.

" $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ lorsqu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$."

Karl Weierstrass (1815-1897 ; Allemagne)

Quelques années plus tard, Weierstass donne une définition du concept de limite, suffisamment explicite pour figurer dans un manuel d'analyse contemporain.

" $\lim_{x \to a} f(x) = L$ lorsqu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$."

On peut considérer que cette définition de Weierstass est à présent totalement **statique**. La formulation ne repose en effet que sur les nombres réels, toutes les considérations liées au mouvement ou à la géométrie étant évacuées.

Karl Weierstrass (1815-1897 ; Allemagne)

Quelques années plus tard, Weierstass donne une définition du concept de limite, suffisamment explicite pour figurer dans un manuel d'analyse contemporain.

" $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ lorsqu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$."

On peut considérer que cette définition de Weierstass est à présent totalement **statique**. La formulation ne repose en effet que sur les nombres réels, toutes les considérations liées au mouvement ou à la géométrie étant évacuées.

La définition de Weierstass diffère de celle utilisée par Cauchy dans ses preuves en ce qu'il impose la condition $0 < |x - a| < \delta$ alors que Cauchy demande simplement $|x - a| < \delta$.

Limite pointée VS limite épointée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Lorsqu'on souhaite donner une définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, il y a classiquement deux façons de procéder.

Limite pointée VS limite épointée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Lorsqu'on souhaite donner une définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, il y a classiquement deux façons de procéder.

1) La façon pointée (avec a adhérent à D) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Limite pointée VS limite épointée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Lorsqu'on souhaite donner une définition de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, il y a classiquement deux façons de procéder.

1) La façon pointée (avec a adhérent à D) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

2) La façon épointée (avec a adhérent à $D \setminus \{a\}$) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Limite pointée VS limite épointée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Lorsqu'on souhaite donner une définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, il y a classiquement deux façons de procéder.

1) La façon pointée (avec a adhérent à D) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

2) La façon épointée (avec a adhérent à $D \backslash \{a\}$) :

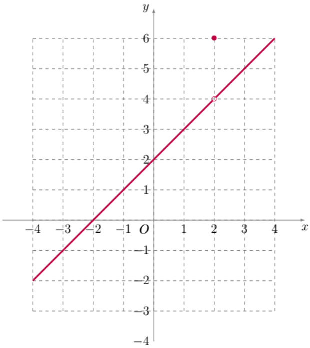
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon).$$

La seconde définition est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D \backslash \{a\}, \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

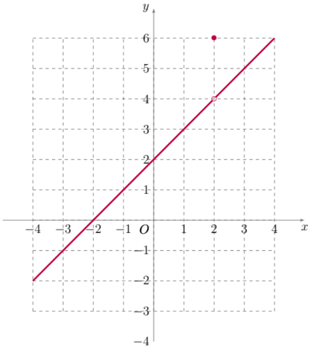
Limite pointée VS limite épointée II

Que vaut $\lim_{x \to 2} f(x)$ si f est la fonction représentée graphiquement par le graphique ci-dessous



Limite pointée VS limite épointée II

Que vaut $\lim_{x \to 2} f(x)$ si f est la fonction représentée graphiquement par le graphique ci-dessous



La limite épointée vaut 4 alors que la limite pointée n'existe pas !

Limite pointée VS limite épointée III

Si a n'appartient pas au domaine de définition, il n'y a aucune différence entre la limite pointée et la limite épointée puisque, dans ce cas, $D = D\backslash\{a\}$. Ceci suffit déjà à comprendre que la nuance entre les deux notions n'interviendra pas dans la plupart des calculs de limite travaillés en secondaire. Si on pense par exemple à un quotient différentiel

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

les limites pointées et épointées pour h tendant vers 0 sont égales puisque 0 est, de fait, exclu du domaine de définition.

Limite pointée VS limite épointée III

Si a n'appartient pas au domaine de définition, il n'y a aucune différence entre la limite pointée et la limite épointée puisque, dans ce cas, $D = D \setminus \{a\}$. Ceci suffit déjà à comprendre que la nuance entre les deux notions n'interviendra pas dans la plupart des calculs de limite travaillés en secondaire. Si on pense par exemple à un quotient différentiel

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

les limites pointées et épointées pour h tendant vers 0 sont égales puisque 0 est, de fait, exclu du domaine de définition.

En revanche, le choix d'une définition plutôt qu'une autre a un impact sur "l'architecture déductive" globale. Par exemple les hypothèses de certains théorèmes doivent être modifiées en fonction de la définition choisie.

Limite pointée VS limite épointée IV

Théorème

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ *et* $g : D' \to D$ *deux fonctions réelles. Soit* a *un réel adhérent à* D' *tel que* $\lim_{x \to a} g(x) = b$*. Supposons de plus que*

$$\lim_{y \to b} f(y) = L.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = L.$$

Limite pointée VS limite épointée IV

Théorème

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ *et* $g : D' \to D$ *deux fonctions réelles. Soit* a *un réel adhérent à* D' *tel que* $\lim_{x \to a} g(x) = b$*. Supposons de plus que*

$$\lim_{y \to b} f(y) = L.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = L.$$

Ce théorème est vrai en pointé et faux en épointé. Considérons $f = \chi_{\{0\}}$ et $g = 0$. Alors il est clair, au sens épointé, que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0} f(y) = 0.$$

Cependant $f \circ g = 1$ donc sa limite épointée en 0 vaut 1.

Définition

Une fonction f est continue en un point a de son domaine si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Limite pointée VS limite épointée V

Définition

Une fonction f est continue en un point a de son domaine si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Cette notion n'a de réelle plus-value qu'avec une définition épointée de la limite. En effet si $a \in D$ et si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe au sens pointé alors nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et on a la continuité. Autrement dit, en version pointée, la notion de continuité se confond avec la notion "d'existence de limite" alors que dans la version épointée, la notion de continuité est un véritable ajout.

Limite pointée VS limite épointée V

Définition

Une fonction f est continue en un point a de son domaine si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Cette notion n'a de réelle plus-value qu'avec une définition épointée de la limite. En effet si $a \in D$ et si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe au sens pointé alors nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et on a la continuité. Autrement dit, en version pointée, la notion de continuité se confond avec la notion "d'existence de limite" alors que dans la version épointée, la notion de continuité est un véritable ajout.

Le théorème de composition des limites est valide en version épointée si l'on exige que la fonction "à l'extérieur" soit continue.

Limite pointée VS limite épointée V

Définition

Une fonction f est continue en un point a de son domaine si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Cette notion n'a de réelle plus-value qu'avec une définition épointée de la limite. En effet si $a \in D$ et si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe au sens pointé alors nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et on a la continuité. Autrement dit, en version pointée, la notion de continuité se confond avec la notion "d'existence de limite" alors que dans la version épointée, la notion de continuité est un véritable ajout.

Le théorème de composition des limites est valide en version épointée si l'on exige que la fonction "à l'extérieur" soit continue.

Faudrait-il en parler dans un cours de maths 6h/sem ?

Quelques points du référentiel de compétences

En maths 4h/sem :

- Il n'est aucunement fait mention de la notion de continuité.
- Il n'est pas demandé de faire des démonstrations.
- L'accent est mis sur l'étude de comportements asymptotiques au "bord du domaine de définition".
- **"Dans cette UAA, on se limitera, pour les calculs, aux fonctions rationnelles."**

Quelques points du référentiel de compétences

En maths 4h/sem :

- Il n'est aucunement fait mention de la notion de continuité.
- Il n'est pas demandé de faire des démonstrations.
- L'accent est mis sur l'étude de comportements asymptotiques au "bord du domaine de définition".
- **"Dans cette UAA, on se limitera, pour les calculs, aux fonctions rationnelles."**

En maths 6h/sem :

- Il est demandé d'aborder la notion de continuité ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires (sans démonstration).
- Les théorèmes relatifs à l'algèbre des limites et composition de limites doivent être énoncés et peuvent être démontrés.
- Une introduction à l'analyse numérique est proposée avec la méthode de la bissection/dichotomie.
- Aucune restriction n'est posée au niveau des fonctions à étudier.

Limites de fonctions rationnelles

Les calculs de limites en l'infini de fractions rationnelles reposent sur l'égalité $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Limites de fonctions rationnelles

Les calculs de limites en l'infini de fractions rationnelles reposent sur l'égalité $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Or par la propriété d'Archimède, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$. Ceci suffit pour établir la valeur de la limite.

Limites de fonctions rationnelles

Les calculs de limites en l'infini de fractions rationnelles reposent sur l'égalité $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Or par la propriété d'Archimède, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$. Ceci suffit pour établir la valeur de la limite.

Or la propriété d'Archimède est déjà valable dans $\mathbb{Q}$. Il n'est donc pas requis de faire appel aux nombres réels.

Limites de fonctions rationnelles

Les calculs de limites en l'infini de fractions rationnelles reposent sur l'égalité $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Or par la propriété d'Archimède, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$. Ceci suffit pour établir la valeur de la limite.

Or la propriété d'Archimède est déjà valable dans $\mathbb{Q}$. Il n'est donc pas requis de faire appel aux nombres réels.

De plus, que teste-t-on réellement avec des calculs de limites de fractions rationnelles ?

Limites de fonctions rationnelles

Les calculs de limites en l'infini de fractions rationnelles reposent sur l'égalité $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Or par la propriété d'Archimède, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$. Ceci suffit pour établir la valeur de la limite.

Or la propriété d'Archimède est déjà valable dans $\mathbb{Q}$. Il n'est donc pas requis de faire appel aux nombres réels.

De plus, que teste-t-on réellement avec des calculs de limites de fractions rationnelles ?

- La factorisation / mise en évidence.
- Les tableaux de signe (sans TVI).
- La division euclidienne.

Limites de fonctions rationnelles

Les calculs de limites en l'infini de fractions rationnelles reposent sur l'égalité $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Or par la propriété d'Archimède, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$. Ceci suffit pour établir la valeur de la limite.

Or la propriété d'Archimède est déjà valable dans $\mathbb{Q}$. Il n'est donc pas requis de faire appel aux nombres réels.

De plus, que teste-t-on réellement avec des calculs de limites de fractions rationnelles ?

- La factorisation / mise en évidence.
- Les tableaux de signe (sans TVI).
- La division euclidienne.

A l'instar de Lagrange, on tente donc d'algrébriser le calcul des limites pour le rendre abordable.

Limites de fonctions rationnelles II

La restriction de l'étude de phénomènes asymptotiques à des fractions rationnelles peut conduire, comme d'Alembert le pensait, à croire que les fonctions finissent toujours par se rapprocher de leur asymptote "par le dessus" ou "par le dessous". Or des fonctions oscillantes comme $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ montrent le contraire.

Limites de fonctions rationnelles II

La restriction de l'étude de phénomènes asymptotiques à des fractions rationnelles peut conduire, comme d'Alembert le pensait, à croire que les fonctions finissent toujours par se rapprocher de leur asymptote "par le dessus" ou "par le dessous". Or des fonctions oscillantes comme $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ montrent le contraire.

Cette restriction empêche également l'apparition de comportements intéressants, e.g. deux asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

Limites de fonctions rationnelles II

La restriction de l'étude de phénomènes asymptotiques à des fractions rationnelles peut conduire, comme d'Alembert le pensait, à croire que les fonctions finissent toujours par se rapprocher de leur asymptote "par le dessus" ou "par le dessous". Or des fonctions oscillantes comme $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ montrent le contraire.

Cette restriction empêche également l'apparition de comportements intéressants, e.g. deux asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

1) Pour avoir deux A.H. / A.O. différentes à gauche et à droite, il faut considérer des fonctions comme $x \mapsto \frac{\sqrt{4x^2-x+3}}{x-4}$.

Limites de fonctions rationnelles II

La restriction de l'étude de phénomènes asymptotiques à des fractions rationnelles peut conduire, comme d'Alembert le pensait, à croire que les fonctions finissent toujours par se rapprocher de leur asymptote "par le dessus" ou "par le dessous". Or des fonctions oscillantes comme $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ montrent le contraire.

Cette restriction empêche également l'apparition de comportements intéressants, e.g. deux asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

1) Pour avoir deux A.H. / A.O. différentes à gauche et à droite, il faut considérer des fonctions comme $x \mapsto \frac{\sqrt{4x^2-x+3}}{x-4}$.
2) Pour avoir une A.H. à gauche et une A.O. à droite, il faut considérer des fonctions comme $x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$.

Limites de fonctions rationnelles II

La restriction de l'étude de phénomènes asymptotiques à des fractions rationnelles peut conduire, comme d'Alembert le pensait, à croire que les fonctions finissent toujours par se rapprocher de leur asymptote "par le dessus" ou "par le dessous". Or des fonctions oscillantes comme $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ montrent le contraire.

Cette restriction empêche également l'apparition de comportements intéressants, e.g. deux asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

1) Pour avoir deux A.H. / A.O. différentes à gauche et à droite, il faut considérer des fonctions comme $x \mapsto \frac{\sqrt{4x^2-x+3}}{x-4}$.
2) Pour avoir une A.H. à gauche et une A.O. à droite, il faut considérer des fonctions comme $x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Est-on réellement sorti du "calculus" en maths 4h/sem ?

Etude approfondie des racines carrées en maths 6h/sem

Le TVI permet de démontrer rigoureusement que $x \mapsto x^2 - 2$ admet une unique racine sur $[0, +\infty[$.

Etude approfondie des racines carrées en maths 6h/sem

Le TVI permet de démontrer rigoureusement que $x \mapsto x^2 - 2$ admet une unique racine sur $[0, +\infty[$.

Pour donner une "matérialité" à $\sqrt{2}$ il est intéressant d'obtenir son développement décimal. Ceci peut par exemple se faire via la méthode de Héron (qui réexploite le TVI sous une autre forme) et qui est similaire à la technique d'Archimède pour approximer π.

Etude approfondie des racines carrées en maths 6h/sem

Le TVI permet de démontrer rigoureusement que $x \mapsto x^2 - 2$ admet une unique racine sur $[0, +\infty[$.

Pour donner une "matérialité" à $\sqrt{2}$ il est intéressant d'obtenir son développement décimal. Ceci peut par exemple se faire via la méthode de Héron (qui réexploite le TVI sous une autre forme) et qui est similaire à la technique d'Archimède pour approximer π.

La méthode des fractions continue stipule que $\sqrt{2}$ est la limite de la suite de rationnels

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$$

construite en passant de p/q à $(p+2q)/(p+q)$.

Etude approfondie des racines carrées en maths 6h/sem

Le TVI permet de démontrer rigoureusement que $x \mapsto x^2 - 2$ admet une unique racine sur $[0, +\infty[$.

Pour donner une "matérialité" à $\sqrt{2}$ il est intéressant d'obtenir son développement décimal. Ceci peut par exemple se faire via la méthode de Héron (qui réexploite le TVI sous une autre forme) et qui est similaire à la technique d'Archimède pour approximer π.

La méthode des fractions continue stipule que $\sqrt{2}$ est la limite de la suite de rationnels

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$$

construite en passant de p/q à $(p+2q)/(p+q)$.

La démonstration de la convergence, le contrôle de l'erreur ainsi que l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ se déduisent de la technique du binôme conjugué, lui donnant ainsi une raison d'être.