48e congrès de la SBPMef
Mercredi 23 août 2023

Apports de la cinématique pour introduire des calculs d'aires et de volumes

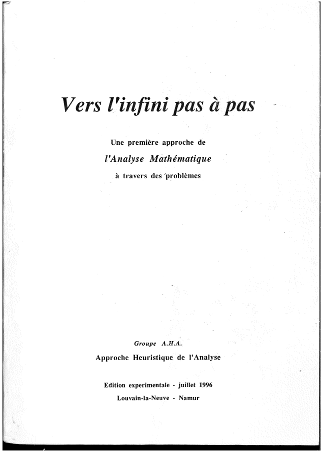
Mariza Krysinska & Laure Ninove

LADIMATH
UCLouvain
Haute École Léonard de Vinci
GEM

Grandir avec les maths…

Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CollÃÍge_St-Michel-Bxl.JPG

Grandir avec les maths…



Vers l'infini pas à pas

Une première approche de

l'Analyse Mathématique

à travers des problèmes

Groupe A.H.A.

Approche Heuristique de l'Analyse

Edition experimentale - juillet 1996

Louvain-la-Neuve - Namur

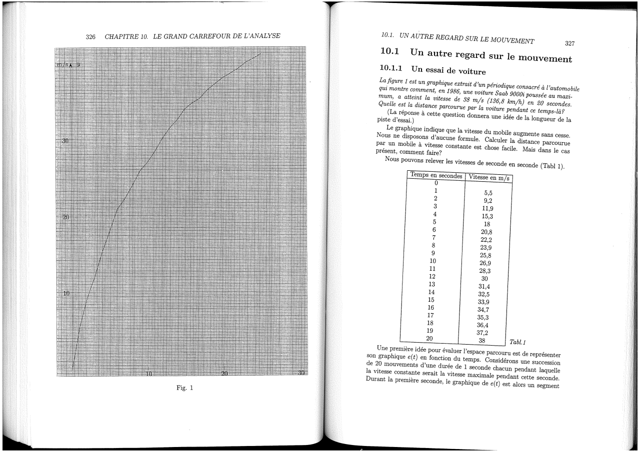


Fig. 1

10.1 Un autre regard sur le mouvement

10.1.1 Un essai de voiture

La figure 1 est un graphique extrait d'un périodique consacré à l'automobile qui montre comment, en 1986, une voiture Saab 9000i poussée au maximum, a atteint la vitesse de 38 m/s (136,8 km/h) en 20 secondes. Quelle est la distance parcourue par la voiture pendant ce temps-là?

(La réponse à cette question donnera une idée de la longueur de la piste d'essai.)

Le graphique indique que la vitesse du mobile augmente sans cesse. Nous ne disposons d'aucune formule. Calculer la distance parcourue par un mobile à vitesse constante est chose facile. Mais dans le cas présent, comment faire?

Nous pouvons relever les vitesses de seconde en seconde (Tabl 1).

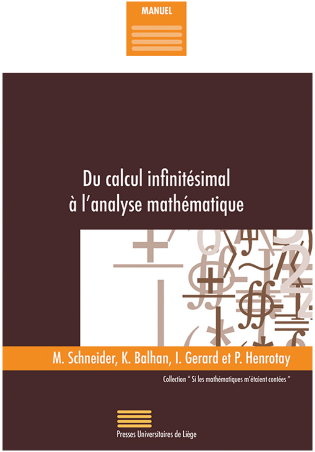
Temps en secondes	Vitesse en m/s
0	
1	5,5
2	9,2
3	11,9
4	15,3
5	18
6	20,8
7	22,2
8	23,9
9	25,8
10	26,9
11	28,3
12	30
13	31,4
14	32,5
15	33,9
16	34,7
17	35,3
18	36,4
19	37,2
20	38

Tabl.1

Une première idée pour évaluer l'espace parcouru est de représenter son graphique $e(t)$ en fonction du temps. Considérons une succession de 20 mouvements d'une durée de 1 seconde chacun pendant laquelle la vitesse constante serait la vitesse maximale pendant cette seconde. Durant la première seconde, le graphique de $e(t)$ est alors un segment


groupe aha
vers l'infini
pas à pas
approche heuristique de l'analyse
manuel
pour l'élève
De Boeck
Wesmael


groupe aha
vers l'infini
pas à pas
approche heuristique de l'analyse
guide
méthodologique
De Boeck
Wesmael


MANUEL
Du calcul infinitésimal
à l'analyse mathématique
M. Schneider, K. Balhan, I. Gerard et P. Henrotay
Collection " Si les mathématiques m'étaient contées "
Presses Universitaires de Liège

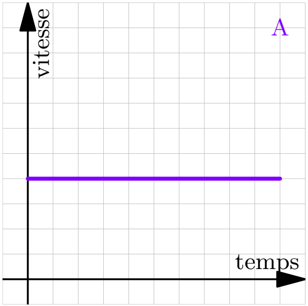
Au menu

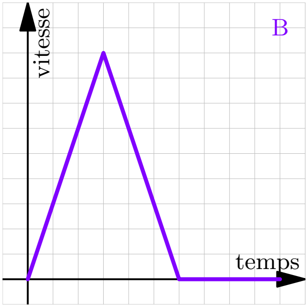
Mise en bouche

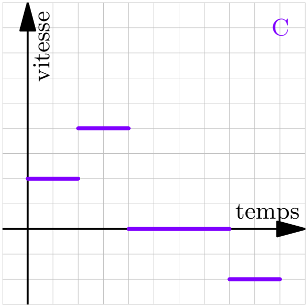
Mise en bouche

On donne le graphique de la vitesse en fonction du temps de trois mobiles évoluant sur une trajectoire rectiligne. On suppose qu'ils sont en position 0 au moment 0.

Pour chacun, esquissez le graphique de la position en fonction du temps.







Comment retrouver le graphique de la position à partir de celui de la vitesse ?

Raisonnement qualitatif se basant sur l'**intuition physique** :

(A) La vitesse est positive et constante, donc le mobile avance de manière régulière.

(B) La vitesse est d'abord positive et croissante, le mobile avance donc de plus en plus vite. Puis elle diminue tout en restant positive : le mobile continue à avancer, mais de moins en moins vite. Finalement, la vitesse est nulle et le mobile ne bouge plus.

(C) La vitesse est d'abord positive et constante, donc le mobile avance de manière régulière. Puis elle est constante et positive et plus élevée, le mobile avance donc de manière régulière et plus rapidement. Puis la vitesse est nulle, donc le mobile ne bouge plus. Enfin, elle devient négative et constante : le mobile recule donc de manière régulière.

Comment retrouver le graphique de la position à partir de celui de la vitesse ?

Raisonnement basé sur les liens entre **dérivée** et **vitesse** ainsi qu'entre dérivée et **pente** :

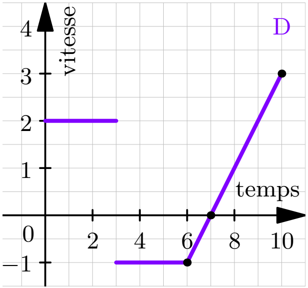
(A) La vitesse / dérivée / pente du graphique position est positive et constante.

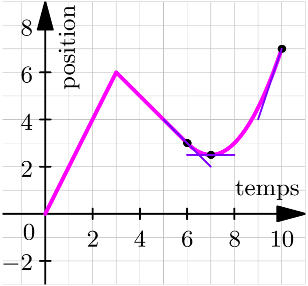
(B) La vitesse / dérivée / pente du graphique position est d'abord positive et croissante, puis positive et décroissante, et enfin nulle.

(C) La vitesse / dérivée / pente du graphique position est constante par morceaux, tantôt positive, tantôt nulle, tantôt négative.

Une analyse plus fine permet de caractériser encore mieux le graphique de la position :

- quand la vitesse est constante sur un intervalle,
  la position est modélisée par une fonction du premier degré sur cet intervalle,
- quand la vitesse est du premier degré sur un intervalle,
  la position est modélisée par une fonction du second degré sur cet intervalle,
- si on se donne des unités aux axes,
  on peut également préciser la pente du graphique position en tout point.





Estimation et calcul de l’espace parcouru par un mobile

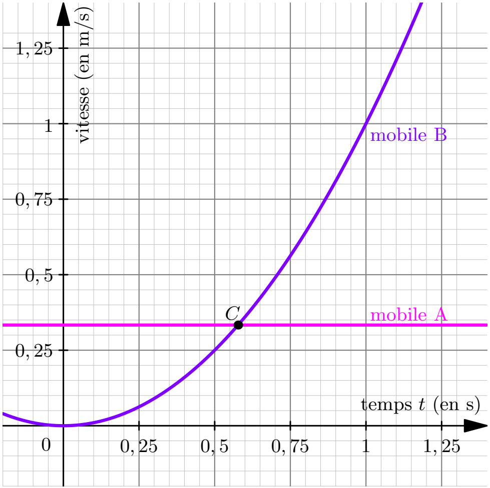
Estimation de l'espace parcouru par un mobile à partir du *graphique* de l'évolution de sa vitesse

Estimation de l'espace parcouru par un mobile à partir du *graphique* de l'évolution de sa vitesse

Voici les graphiques de la vitesse en fonction du temps relatifs à deux mobiles en mouvement.

On suppose qu'au moment 0,
les deux mobiles se trouvent au même endroit.

1. Comment interpréter les graphiques de leurs vitesses, et plus particulièrement le point d'intersection C, en termes de leurs mouvements relatifs ?
2. Le mobile à la traine rattrapera-t-il l'autre ?
3. Peut-on estimer à vue l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?
4. Et à l'aide de calculs numériques ?



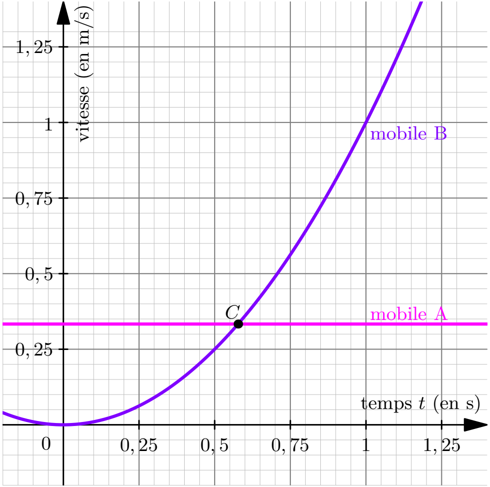
1. Comment interpréter les graphiques de leurs vitesses, et plus particulièrement le point d'intersection C, en termes de leurs mouvements relatifs ?

Les deux mobiles sont au même endroit au temps 0, mais jusqu'au moment correspondant au point C, le mobile A est plus rapide que le mobile B et va donc prendre de l'avance sur lui.

L'abscisse du point C correspond au moment où les deux mobiles ont la même vitesse. Son ordonnée correspond à la vitesse des deux mobiles à ce moment-là.

Il n'y a aucune raison que les deux mobiles soient situés au même endroit à ce moment :
ils ont seulement la même vitesse à cet instant.

Après le moment correspondant au point C, le mobile B devient plus rapide que le mobile A. L'espace qui sépare les deux mobiles se réduit : le mobile B diminue progressivement son retard sur A.

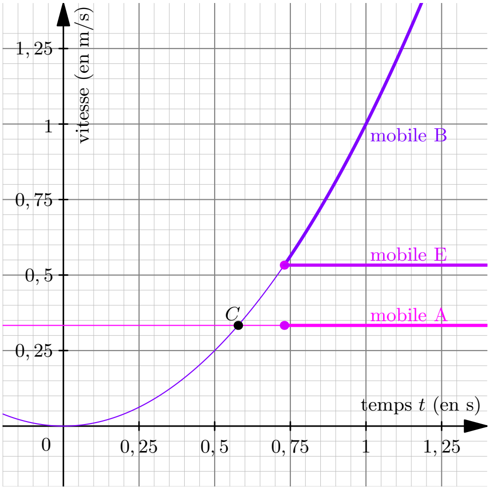


2. Le mobile à la traîne rattrapera-t-il le premier ?

Si le mobile A a une vitesse constante et le mobile B une vitesse (croissante) strictement supérieure à celle de A (après le moment correspondant à C), on peut penser que, quel que soit le retard de B, il finira bien par rattraper A si on lui laisse assez de temps.

Imaginons un mobile E qui aurait une vitesse constante v_E strictement supérieure la vitesse v_A de A (en m/s) et un retard de r (en m). On peut calculer que le mobile E rattraperait A en un temps fini, au moment $t = r/(v_E - v_A)$.

Si B commence avec le même retard et la même vitesse v_E, puis va de plus en plus vite, il se trouve à tout instant avant E et donc rattrapera forcément également A.



3. Peut-on estimer *à vue* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

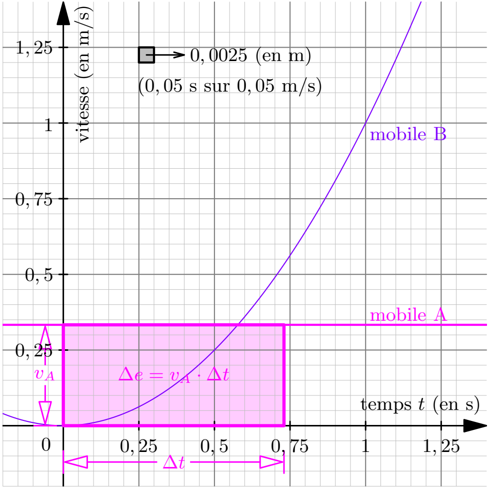
La question est difficile…

Commençons par réfléchir pour le mobile A de vitesse constante.

Si ce mobile a une vitesse de v_A (en m/s), il parcourt sur un intervalle de temps Δt (en s) une distance

$$\boxed{\Delta e = v_A \cdot \Delta t,}$$

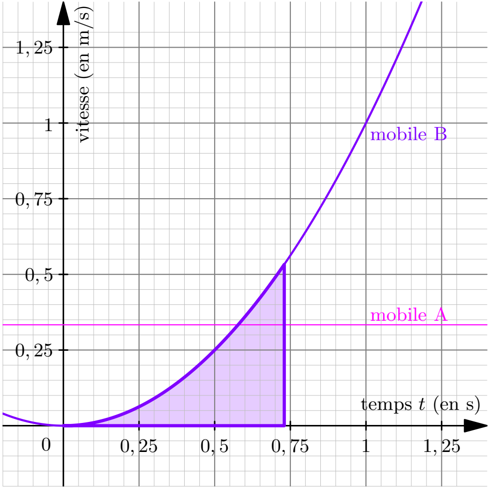
ce qui correspond à l'**aire du rectangle** de côtés Δt et v_A.



3. Peut-on estimer *à vue* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

Et pour le mobile B de vitesse variable ?

La distance parcourue sur un intervalle de temps Δt pourrait-elle être égale à la surface du triangle curviligne de base Δt ?

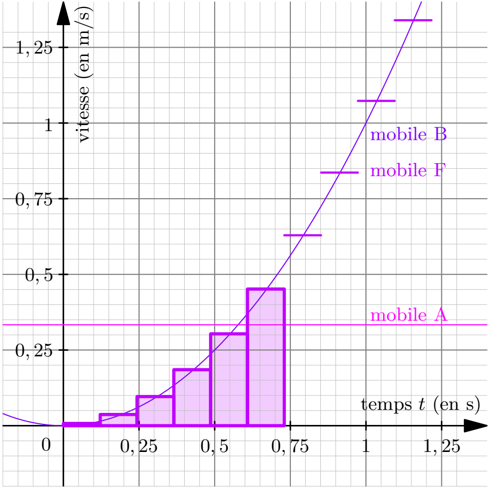


3. Peut-on estimer *à vue* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

Et pour le mobile B de vitesse variable ?

La distance parcourue sur un intervalle de temps Δt pourrait-elle être égale à la surface du triangle curviligne de base Δt ?

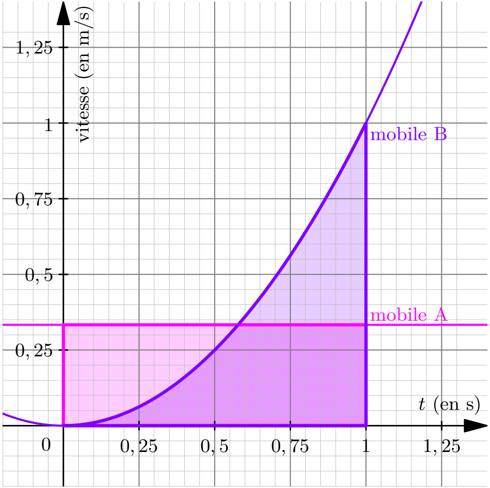
On peut imaginer un mobile F qui aurait une vitesse constante par morceaux. Sur chacun des morceaux, la distance parcourue correspondrait à l'aire d'un rectangle. Cela ne semble donc pas déraisonnable de penser que, dans le cas d'une vitesse qui évolue de manière plus lisse comme pour B, la distance parcourue serait égale à l'aire du triangle curviligne.



3. Peut-on estimer *à vue* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

Pour quel moment les aires sous les courbes des graphiques pour les mobiles A et B seraient-elles égales ?

Visuellement, cela semble être pour un moment aux alentours de $t = 1$.

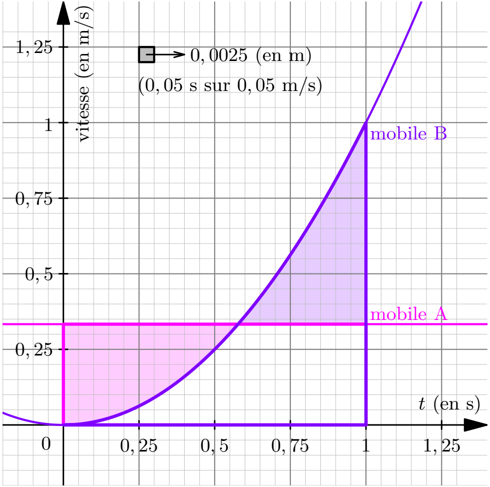


4. Peut-on estimer *à l'aide de calculs numériques* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

Essayons d'évaluer à l'aide de calculs numériques si l'estimation du moment $t = 1$ est raisonnable.

On peut compter approximativement les petits carrés (de côtés 0,05) du quadrillage correspondant au mieux pour chaque triangle curviligne du « nœud papillon ». En combinant des morceaux, on en compte environ une cinquantaine pour chacun.

L'estimation de $t = 1$ est donc raisonnable.



4. Peut-on estimer *à l'aide de calculs numériques* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

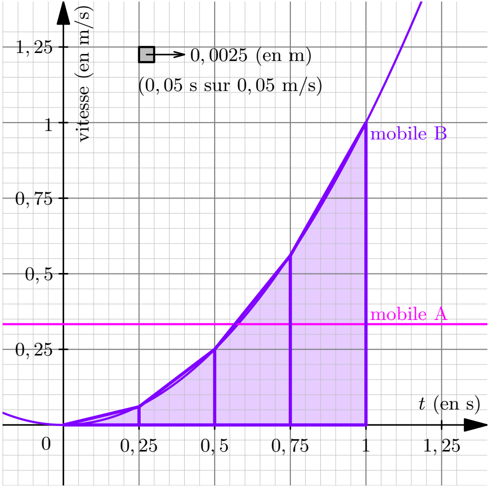
On peut aussi mesurer sur le graphique que $v_A \approx 0{,}33$. La distance parcourue par le mobile A entre $t = 0$ et $t = 1$ vaut donc approximativement $e_A = 0{,}33$ (en m).

Pour le mobile B, on peut par exemple découper le triangle curviligne en trapèzes dont on mesure les côtés pour calculer leur aire.

En découpant en quatre trapèzes (ou triangle), on trouve approximativement

$$\frac{0{,}06 \cdot 0{,}25}{2} + \frac{(0{,}06 + 0{,}25) \cdot 0{,}25}{2} + \frac{(0{,}25 + 0{,}56) \cdot 0{,}25}{2} + \frac{(0{,}56 + 1) \cdot 0{,}25}{2} = 0{,}3425.$$

L'estimation de $t = 1$ est donc raisonnable.



4. Peut-on estimer *à l'aide de calculs numériques* l'instant de leur deuxième rencontre ? Si oui, comment et pourquoi ?

Pour le mobile B, on peut aussi encadrer l'aire recherchée à l'aide de rectangles par défaut et par excès.

Par exemple, prenons 10 rectangles par défaut et 10 rectangles par excès.

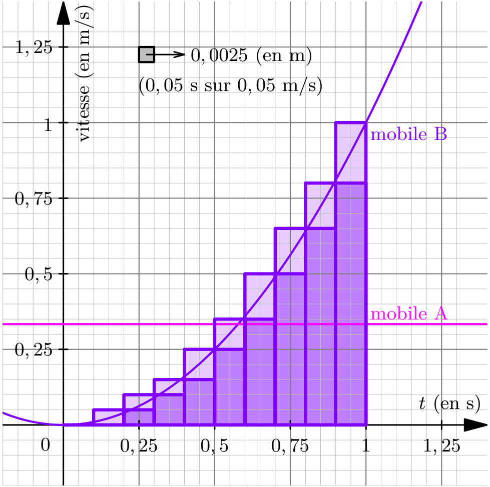
En supposant qu'on peut mesurer à 0,05 près, on trouve une aire (approchée) par défaut de

$$0{,}1 \cdot (0{,}05+0{,}1+0{,}15+0{,}25+0{,}35+0{,}15+0{,}65+0{,}8) = 0{,}285,$$

et une aire (approchée) par excès de

$$0{,}1 \cdot (0{,}05+0{,}1+0{,}15+0{,}25+0{,}35+0{,}15+0{,}65+0{,}8+1) = 0{,}385,$$

L'estimation de $t = 1$ est donc raisonnable.



Calcul de l'espace parcouru par un mobile
à partir de la *formule* de l'évolution de sa vitesse

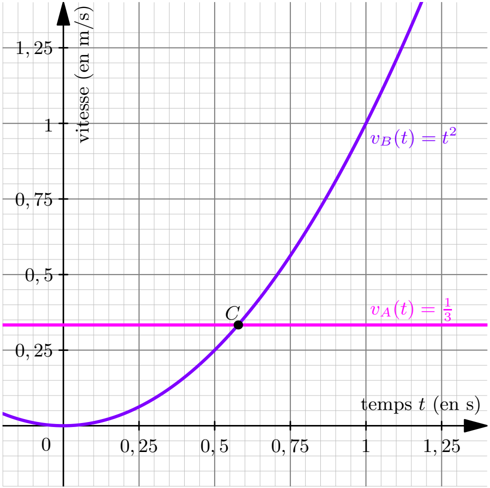
Calcul de l'espace parcouru par un mobile à partir de la *formule* de l'évolution de sa vitesse

On garde les mêmes graphiques auxquels on associe des formules.

Supposons que le mobile A se déplace à vitesse constante v_A de $1/3$ (en m/s) et que le mobile B a une vitesse qui augumente selon la formule $v_B(t) = t^2$ (en m/s).

On a estimé tout à l'heure que l'instant de leur rencontre se situerait aux alentours de $t = 1$.

Peut-on confirmer ou infirmer cela en utilisant l'information donnée par les formules ?



Première méthode : par primitivation

En 5^{e} année, on a vu que la vitesse est la dérivée de l'espace en fonction du temps.

Pour que $v_A(t) = \frac{1}{3}$ et $e_A(t) = 0$, on doit forcément avoir $\boxed{e_A(t) = \frac{t}{3}}$.

Pour que $v_B(t) = t^2$ et $e_B(t) = 0$, on doit forcément avoir $\boxed{e_B(t) = \frac{t^3}{3}}$.

Les deux mobiles auront donc la même position quand $\dfrac{t}{3} = \dfrac{t^3}{3}$, càd quand $t^3 - t = 0$ ou encore $t \cdot (t-1) \cdot (t+1) = 0$.

Les deux mobiles se rencontrent donc

- quand $t = 0$ (on le savait par l'énoncé),
- quand $t = 1$ (cela confirme ce qu'on conjecturait jusqu'à présent),
- et $t = -1$ (à rejeter au vu du contexte).

Deuxième méthode : par intégration

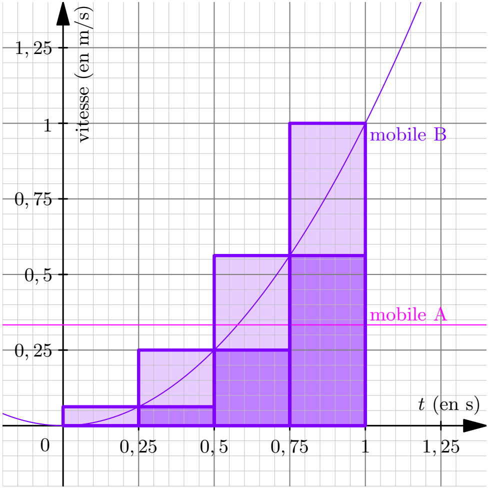
Les distances parcourues par les deux mobiles seraient égales si les aires sous les courbes correspondant à leur vitesse entre $t = 0$ et $t = 1$ étaient égales.

Pour le mobile A, cette aire est égale à $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, donc

$$e_{A,[0,1]} = \frac{1}{3}.$$

Pour le mobile B, on encadre cette aire par les sommes d'aires de rectangles par défaut et par excès.

En prenant chaque fois n rectangles de largeur $1/n$, on trouve



$$0 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \quad < \quad e_{B,[0,1]} \quad < \quad \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

Pour $n = 4$, on trouve

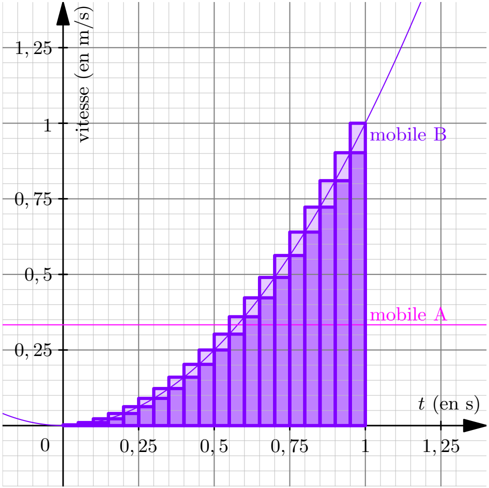
$$0{,}21875 < e_{B,[0,1]} < 0{,}46875.$$

Pour $n = 10$, on trouve

$$0{,}285 < e_{B,[0,1]} < 0{,}385.$$

Pour $n = 20$, on trouve

$$0{,}3088 < e_{B,[0,1]} < 0{,}3588$$



La précision du calcul n'est pas suffisante à ce stade pour confirmer le moment de la deuxième rencontre, mais l'estimation $t = 1$ n'est pas mise en défaut.

Pour aller plus loin, il faudrait soit utiliser un logiciel permettant de calculer à notre place, soit connaitre une formule exprimant de manière compacte la somme des n premiers carrés.

On écrit

$$
\begin{aligned}
e_{B,[0,1]} &= \lim_{n\to\infty} \left(0 + \tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{n}{n}\right)^2\right) = \int_0^1 x^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Retour à la 1re méthode : par primitivation en établissant une forme particulière du théorème fondamental selon laquelle la dérivée de l'espace en fonction du temps est la vitesse

Mais peut-être n'a-t-on pas abordé le lien entre vitesse et dérivée en 5e année (ou a-t-on simplement oublié)…

Sur un intervalle de temps Δt, on a $\Delta e = v_{moy} \cdot \Delta t$.

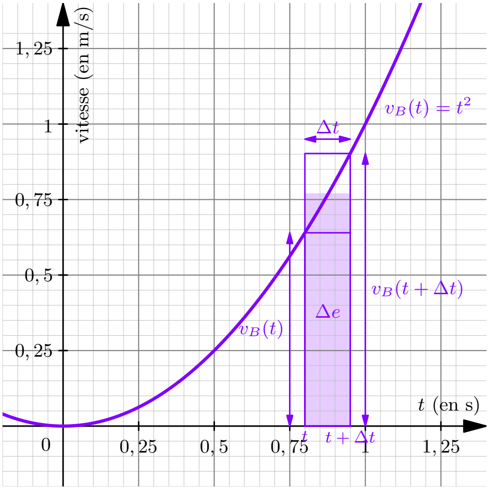
Or, puisque la vitesse du mobile B est croissante, on a forcément, sur $[t,t + \Delta t]$:

$$v(t) < v_{moy} < v(t + \Delta t),$$

et donc

$$v(t) \cdot \Delta t < \Delta e < v(t + \Delta t) \cdot \Delta t.$$

L'espace parcouru sur $[t,t + \Delta t]$ correspond à l'aire d'un rectangle intermédiaire entre les rectangles par excès et par défaut.



On a

$$v(t) \cdot \Delta t < \Delta e < v(t + \Delta t) \cdot \Delta t,$$

et

$$v(t) < \frac{\Delta e}{\Delta t} < v(t + \Delta t),$$

et enfin

$$e'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = v(t).$$

On dit que la fonction e est une *primitive* de la fonction v.

Ici, e est telle que $e'(t) = v(t)$ et $e(0) = 0$.

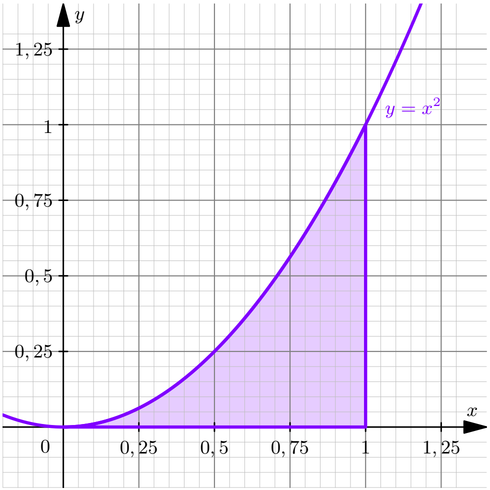
Avec $v_B(t) = t^2$, on a donc $e_B(t) = \frac{1}{3}t^3$.

Calcul de l’aire sous une courbe

Calcul de l'aire sous une courbe

Estimez l'aire sous la courbe donnée par $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 1$ en la comparant à l'aire du rectangle unitaire.

Ensuite, calculez-la en vous inspirant des calculs de l'espace parcouru par un mobile à partir de la vitesse variable donnée par le graphique et par la formule.

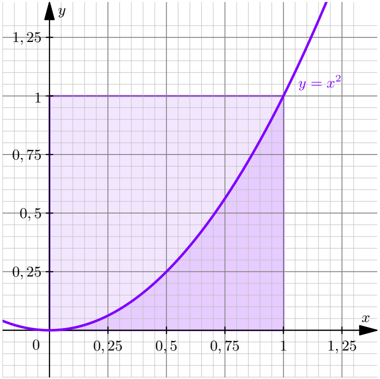


Par primitivation

Précédemment, on a établi que

- l'espace parcouru par un mouvement caractérisé par une courbe de la vitesse variable revient à calculer l'aire sous cette courbe ;
- l'espace en fonction du temps est une primitive de la fonction de la vitesse.

La courbe donnée par $y = x^2$ où x et y sont des variables numériques peut être interprétée comme celle de la vitesse y en fonction du temps x.
L'aire sous cette courbe est calculée par une primitive de la vitesse.



La primitive générale donnée par l'expression est $\frac{1}{3}x^3 + k$. Ici, $k = 0$ car pour $x = 0$, on a $y = 0$.
La fonction donnée par $A(x) = \frac{1}{3}x^3$ permet de calculer l'aire entre les abscisses 0 et x.
Pour $x = 1$, $A(x) = \frac{1}{3}$. Il s'agit de $\frac{1}{3}$ d'aire du carré unitaire.

Par intégration

On encadre l'aire sous l'arc de parabole sur $[0,1]$ par la somme de l'aire de n rectangles par défaut et celle de n rectangles par excès.

On trouve
$$0 + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{2}{n})^2 + \cdots + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{n-1}{n})^2 \; < \; A_{[0,1]} \; < \; \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{2}{n})^2 + \cdots + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{n}{n})^2,$$

d'où il vient

$$A_{[0,1]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2 \, dx.$$

Remarquons que c'est la même somme que celle trouvée lors du calcul de l'espace à partir du graphique de la vitesse.

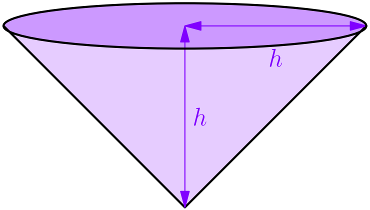
On pourrait ensuite calculer des encadrements successifs pour l'aire, ou calculer la limite des deux sommes si on connaissait une formule compacte pour la somme des premiers carrés.

Calcul du volume d’un cône

Calcul du volume d’un cône

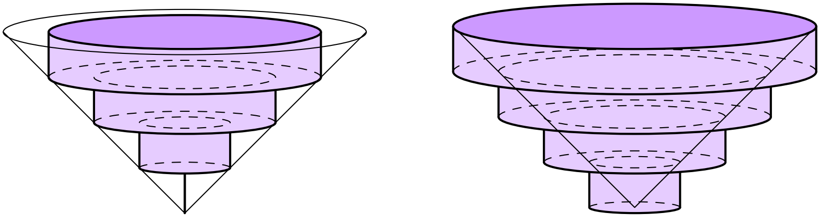
Estimez le volume d’un cône circulaire droit dont le rayon de la base est égal à la hauteur en le comparant au volume du cylindre de mêmes base et hauteur.

Comment peut-on le calculer ?



Première méthode : par intégration

On encadre le volume du cône par des somme de volumes de cylindres par défaut et par excès.



En prenant chaque fois n cylindres de hauteur h/n, on trouve

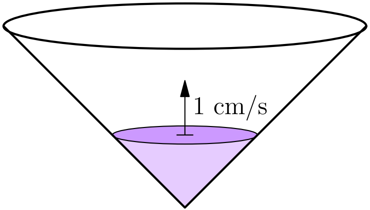
$$0+\pi\cdot\left(\tfrac{h}{n}\right)^2\cdot\tfrac{h}{n}+\pi\cdot\left(\tfrac{2h}{n}\right)^2\cdot\tfrac{h}{n}+\cdots+\pi\cdot\left(\tfrac{(n-1)h}{n}\right)^2\cdot\tfrac{h}{n}<V(h)<\pi\cdot\left(\tfrac{h}{n}\right)^2\cdot\tfrac{h}{n}+\pi\cdot\left(\tfrac{2h}{n}\right)^2\cdot\tfrac{h}{n}+\cdots+\pi\cdot\left(\tfrac{nh}{n}\right)^2$$

d'où il vient

$$V(h)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\pi\cdot\left(\frac{ih}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\cdot\left(\frac{ih}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}=\int_0^h\pi\,x^2\,dx.$$

Calcul du volume d'un cône

On suppose que le cône est un récipient
qu'on remplit avec un liquide,
de sorte que la hauteur de liquide
augmente à la vitesse de 1 cm/s.



Comment varie le débit en fonction du temps ?

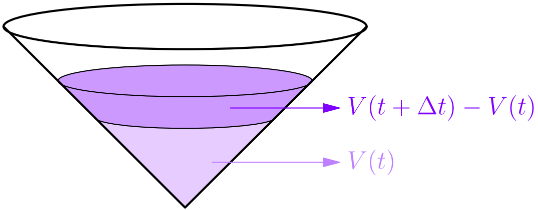
Comment établir le volume du cône à partir de ce débit ?

Le débit instantané a une interprétation particulière liée au cône vu que $t = r = h$. Laquelle ?

(Pour simplifier les notations, on notera $t = r = h$ même si t n'a pas les mêmes unités que r et h.)

Deuxième méthode : par primitivation

Soit $V(t)$ le volume déjà rempli au temps t.
À tout instant, on a $r(t) = h(t) = t$.



Le volume du tronçon de cône correspondant à $[t, t+\Delta t]$ est compris entre celui des cylindres par défaut et par excès :

$$\pi \cdot t^2 \cdot \Delta t < V(t{+}\Delta t){-}V(t) < \pi \cdot (t{+}\Delta t)^2 \cdot \Delta t.$$

Sur cet intervalle de temps, le débit moyen est donc encadré comme

$$\pi \cdot t^2 < \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} < \pi \cdot (t+\Delta t)^2.$$

D'où le débit instantané au moment t vaut $V'(t) = \pi\, t^2$, et donc $V(t) = \frac{1}{3}\pi\, t^3$.

L'expression $\pi\, t^2$ est ausi celle de l'aire de la section plane du cône au moment $t = h$.

On a donc aussi

$$V'(h) = \pi\, h^2.$$

Il en résulte que la fonction $V(h)$ est une primitive de la fonction des sections au niveau h, à savoir $S(h) = \pi\, h^2$:

$$V(h) = \frac{1}{3}\,\pi\, h^3.$$

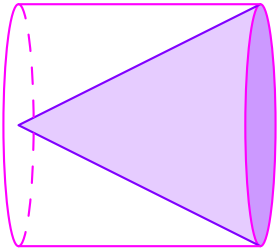
Lien entre l’aire sous la parabole et le volume du cône

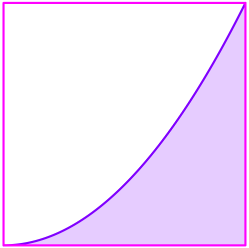
Lien entre l'aire sous la parabole et le volume du cône

Vérifiez que le rapport du volume d'un cône à celui du cylindre dans lequel il est inscrit est égal au rapport entre l'aire sous un arc de parabole et celle du rectangle (ou carré) dans lequel l'arc est inscrit.

Cette égalité des rapports signifie qu'on peut faire un rapprochement entre le calcul d'un volume et l'aire sous une courbe.

Comment établir la formule de la parabole sous laquelle l'aire est équivalente au volume du cône de rayon R et hauteur H ?





Quel est le rapport du volume d'un cône à celui du cylindre dans lequel il est inscrit ?

On a montré que le volume d'un cône dont le rayon est égal à la hauteur H vaut $\frac{1}{3}\,\pi\,H^3$.

Un cylindre de même base et de même hauteur a pour volume $\pi\,H^3$.

Le rapport entre ces deux volumes vaut donc $\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

On pourrait montrer que pour une hauteur H et un rayon R, le volume vaut $\frac{1}{3}\,\pi\,R^2\,H$.

Dans ce cas, le volume du cylindre circonscrit au cône vaut $\pi\,R^2\,H$.

Le rapport entre ces deux volumes vaut donc bien également $\frac{1}{3}$.

Quel est le rapport entre l'aire sous un arc de parabole et celle du rectangle dans lequel l'arc est inscrit ?

On a montré que l'aire sous la parabole d'équation $y = x^2$ entre 0 et 1 vaut $\frac{1}{3}$.

L'aire du carré de côté 1 dans lequel l'arc est inscrit vaut 1.

Le rapport entre ces deux aires vaut donc $\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

On pourrait montrer que l'aire sous la parabole d'équation $y = k\,x^2$ entre 0 et ℓ vaut $\frac{1}{3}\,k\,\ell^3$.

L'aire du rectangle circonscrit à cet arc de parabole vaut $\ell \cdot k\ell^2 = k\ell^3$.

Le rapport entre ces deux aires vaut donc bien également $\frac{1}{3}$.

Pourquoi les deux rapports sont-ils égaux dans ces contextes a priori fort différents ?

On peut y voir plusieurs raisons. *(Pour simplifier, on considère le cas où $R = H$.)*

- La fonction donnée par $y = x^2$ et la fonction $V'(h) = \pi h^2$ appartiennent à une même famille de fonctions :

$$y = ax^2.$$

La forme générale de ses primitives

$$\int ax^2 \, dx = \frac{1}{3} ax^3 + k$$

contient un même facteur $\boxed{\frac{1}{3}}$.

- Les sommes sont du même type :

$$\text{Aire P} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \Delta x$$

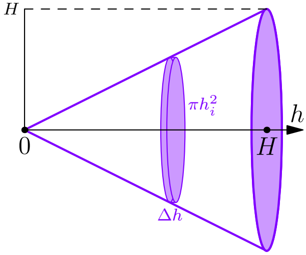
$$\text{Vol C} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(\frac{iH}{N}\right)^2 \cdot \frac{H}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi h_i^2 \cdot \Delta h.$$

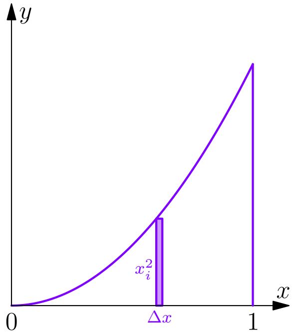
Et donc, les intégrales sont du même type :

$$\int_0^b ax^2\,dx,$$

$$\text{Aire sous la parabole} = \int_0^1 x^2\,dx,$$

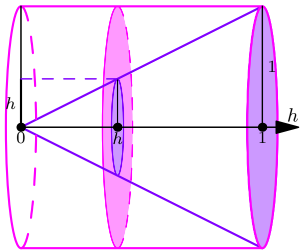
$$\text{Volume du cône} = \int_0^H \pi h^2\,dh.$$

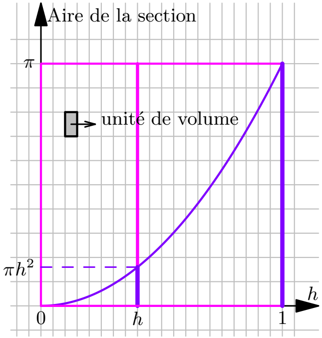




- L'aire des sections planes du cône peut être exprimée comme $S(h) = \pi\, h^2$.

  Le rapport entre les aires des sections planes du cône et du cylindre est donc égal au rapport entre les longueurs des segments sous la parabole et sous le côté supérieur du rectangle.





En conclusion, l’intégrale d’une même fonction peut servir
soit à calculer l’aire sous une courbe,
soit le volume d’un solide,
soit l’espace parcouru par un mobile de vitesse donnée.

Vers une méthode générale du calcul des volumes de sections connues

Un calcul de volume ramené à un calcul d'aire

Rappelons-nous, dans le cas où $r = h$, on a $V'(h) = \pi h^2$.
Comment transformer le calcul du volume d'un cône quelconque
en calcul d'aire sous une courbe ?

Le volume d'un solide de sections connues est calculé par une primitive de la fonction d'aire des sections planes en fonction de la hauteur.
Il est donc équivalent à l'aire sous la courbe des sections parallèles à la base.

Application au calcul du volume d'un cône circulaire quelconque

Soit un cône de rayon R et de hauteur H. Quel est sont volume ?

Soit $S(h)$ une section plane de cône parallèle à la base à la hauteur h.
Son rayon est alors $h\,\frac{R}{H}$.
On a donc

$$S(h) = \pi\, h^2 \left(\frac{R}{H}\right)^2,$$

$$\int \pi\, h^2 \left(\frac{R}{H}\right)^2 dh = \frac{1}{3}\,\pi\, h^3 \left(\frac{R}{H}\right)^2 + k.$$

Et donc

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, H^3 \left(\frac{R}{H}\right)^2 = \frac{1}{3}\,\pi\, R^2 H.$$

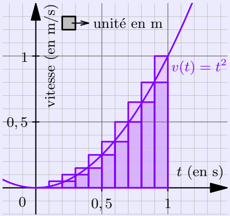
Petit récapitulatif du travail réalisé jusqu'à présent

Des problèmes dans des contextes variés,
des méthodes complémentaires,
des contextes complémentaires

	Espace parcouru	Aire sous une courbe	Volume d'un solide

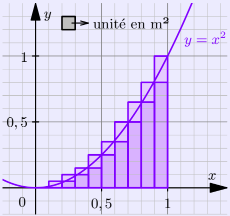
par intégration

Espace parcouru



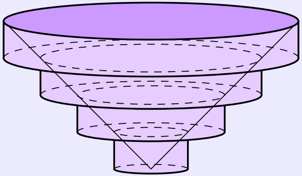
$e_{[0,1]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2}$

Aire sous une courbe



$A_{[0,1]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2}$

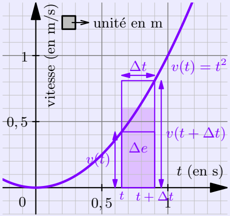
Volume d'un solide



$V_{[0,H]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i} \pi\left(\frac{iH}{n}\right)^2 \frac{H}{n}$

par primitivation

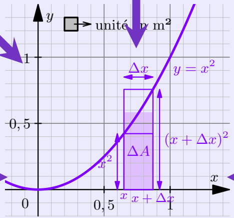
Espace parcouru



$e'(t) = v(t) = t^2 ; e(0) = 0$

donc $e(t) = \frac{1}{3}t^3$

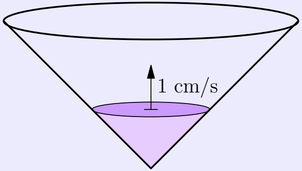
Aire sous une courbe



$A'(x) = x^2 ; A(0) = 0$

donc $A(x) = \frac{1}{3}x^3 ; A_{[0,1]} = \frac{1}{3}$

Volume d'un solide



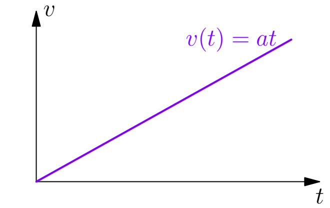
$V'(t) = S(t) = \pi t^2 ; V(0) = 0$

donc $V(t) = \frac{1}{3}\pi t^3$

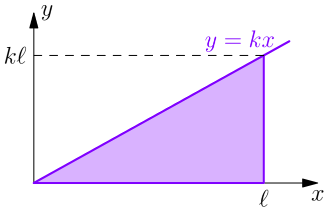
D’abord l’espace parcouru par un mobile avec une vitesse variable donnée est l’aire sous la courbe de vitesse et que l’on peut calculer à l’aide d’un primitive de la vitesse.

Ensuite dans le problème d’aire sous une courbe, la courbe est considérée comme vitesse d’un mobile donc son aire peut être calculée aussi par la primitivation.

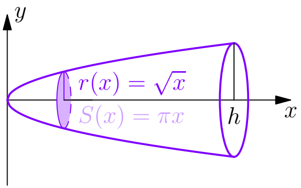
Dans le cas d’un solide de sections parallèles connues, le calcul de son volume est ramené au calcul de l’aire sous la courbe de ses sections planes.



Position $e(t) = \dfrac{at^2}{2} + \text{cste}$

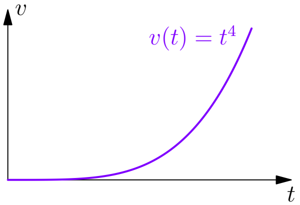


Aire du triangle $A_{[0,\ell]} = \dfrac{\ell \cdot k\ell}{2} = \dfrac{k\ell^2}{2}$

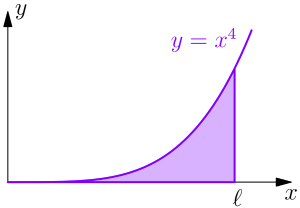


Volume du paroboloïde $V_{[0,h]} = \dfrac{\pi h^2}{2}$

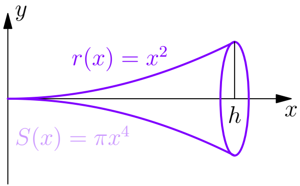
On peut s'appuyer sur le contexte cinématique ou celui des aires.



Position $e(t) = \dfrac{t^5}{5} + \text{cste}$

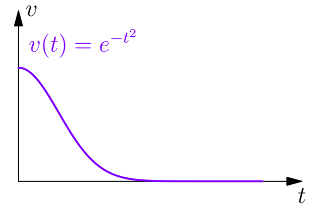


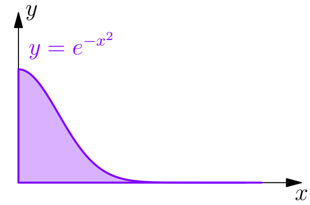
Aire $A(x) = \dfrac{x^5}{5}$

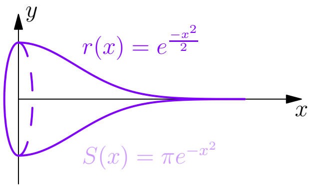


Volume $V(x) = \dfrac{\pi x^5}{5}$

On peut s'appuyer sur le contexte cinématique.







Calcul des primitives impossible (fonction non élémentaire).

Nécessité de calculer l'intégrale de manière numérique.

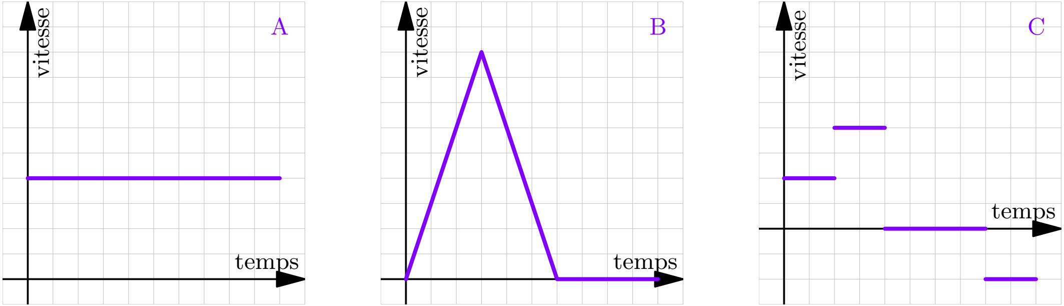
On peut s'appuyer sur le contexte des aires.

Retour au point de départ

Retour au point de départ

On donne le graphique de la vitesse en fonction du temps de trois mobiles évoluant sur une trajectoire rectiligne. On suppose qu'ils sont en position 0 au moment 0.

Pour chacun, esquissez le graphique de la position en fonction du temps.

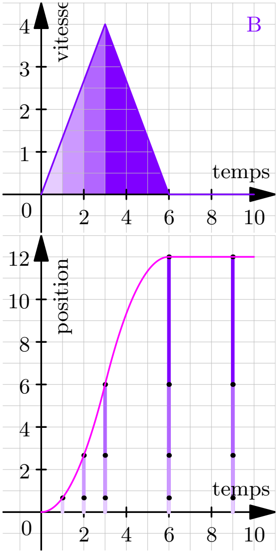


On avait construit le graphique de la position en fonction du temps à partir de celui de la vitesse en fonction du temps

- par un raisonnement qualitatif basé sur l'intuition physique,
- par un raisonnement basé sur les liens entre vitesse, dérivée et pente.

On peut aussi réfléchir

- en termes d'aires sous la courbe vitesse.



Quelques commentaires de nature didactique

- La référence à la cinématique a facilité le regard sur l'aire sous une courbe comme grandeur variable en fonction de l'abscisse et sur le volume d'un solide comme grandeur variable en fonction de sa hauteur.
- Dans le calcul des aires des rectangles remplissant une surface sous la courbe représentative d'une fonction et dans la représentation graphique des sections planes d'un solide, on s'appuie sur la représentation des valeurs de la fonction par la longueur du segment vertical égale à l'ordonnée et placé à l'abscisse correspondante.
- On fait usage permanent de la derivée à partir d'interprétations multiples de sa définition :

$$e'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t + \Delta t) - e(t)}{\Delta t}, \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$V'(h) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{V(h + \Delta h) - V(h)}{\Delta h},$$

Merci !