Congrès de la SBPMef
Collège Saint-Michel
Mercredi 23 aout 2023

À l'ombre d'un mur

GEM: groupe modélisation

Isabelle Berlanger, Claire Ponselet, Florence Popoff

UCLouvain

Haute École Galilée

GEM

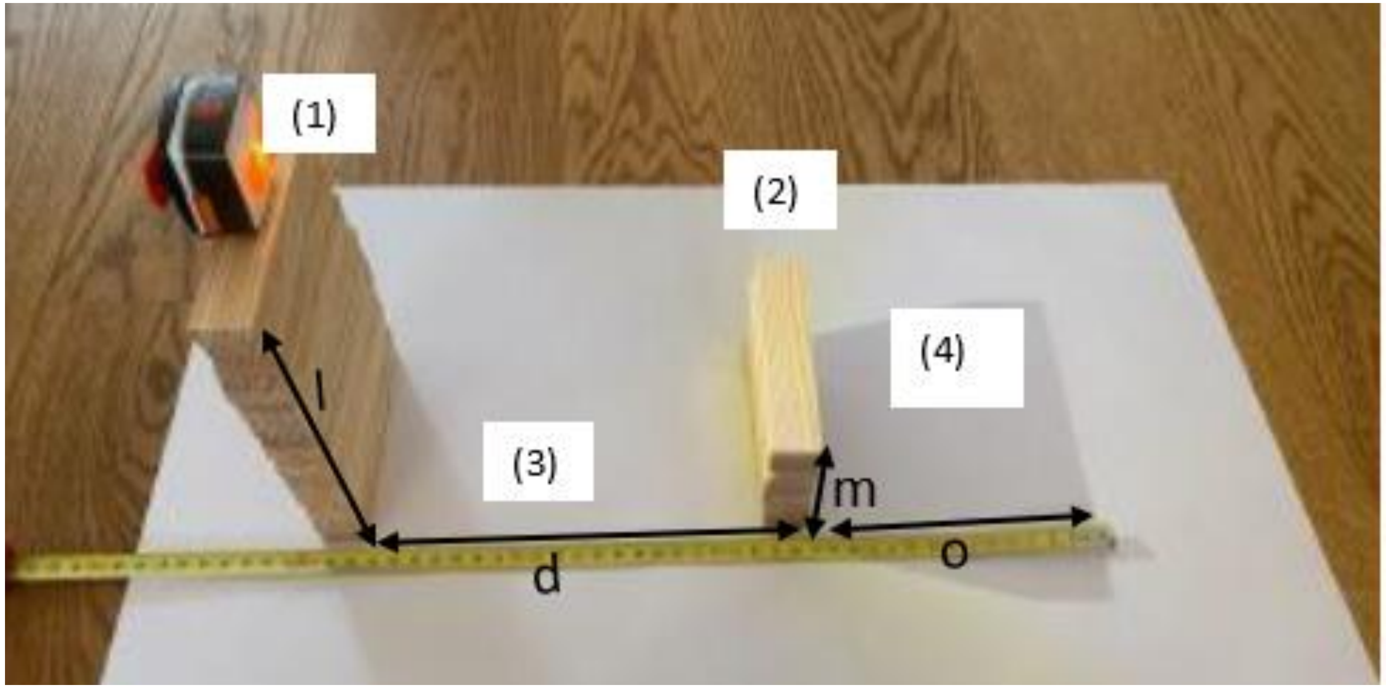
Une activité à vivre : expérimentation et modélisation

Contexte de départ

Un projecteur est fixé en hauteur sur un mat, à une certaine distance d’un muret qu’il éclaire de plein fouet. Quelle sera la taille de l’ombre projetée de l’autre côté du mur ?

La situation expérimentale : dispositif

Une lampe se trouve d'un côté d'un mur, fixée en hauteur. Le mur est bien droit, supposé très étendu à gauche et à droite. De l'autre côté du mur, on observe l’ombre que fait le mur sur le sol : on ne s’intéresse qu’à la *longueur de cette ombre*, du pied du mur à la limite de la zone d'ombre (en négligeant les effets sur les bords).



1 *Lampe (1), mur (2), distance entre la lampe et le mur (3) et ombre projetée sur le sol (4)*

La situation expérimentale : paramètres

On souhaite étudier l'évolution de la longueur de l'ombre o en fonction de :

- la hauteur m du mur ;
- la hauteur l de la lampe ;
- la distance d entre la lampe et le mur.

Comment se comporte la longueur de l'ombre o lorsque l'on fait varier ces trois paramètres ?

1. Phase d’observation : consigne

Comment doubler l’ombre ?

Faire des conjectures sur les relations entre paramètres.

Phase d’observation : conjectures proposées par les élèves

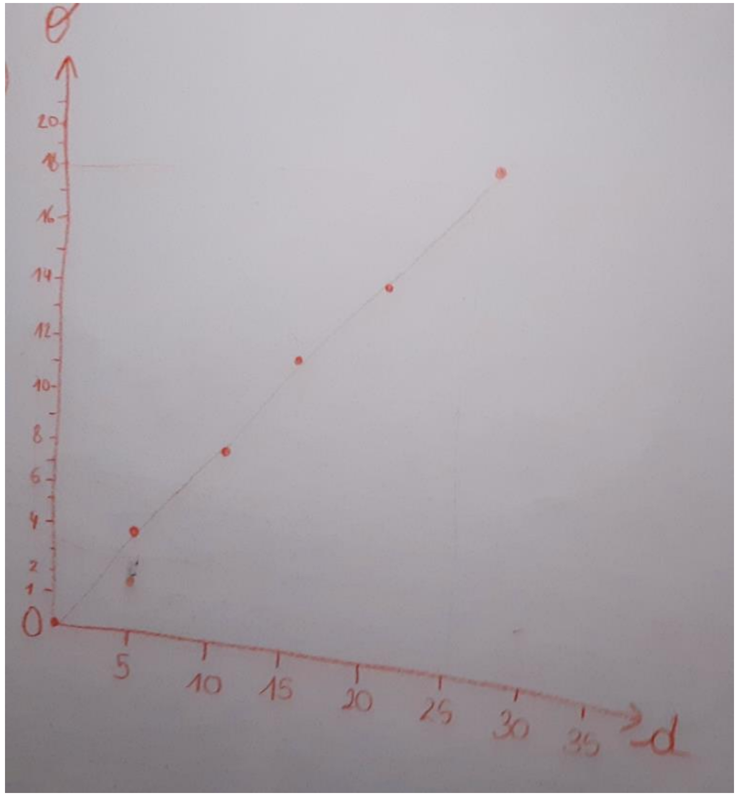
1) Plus le mur est loin plus l'ombre grandit.
2) Plus la lampe est haute plus l'ombre baisse.
3) La longueur de l'ombre augmente de moins en moins vite lorsqu'on augmente la distance entre le mur et la lampe.
4) Lorsqu'on varie la hauteur du mur, il est impossible que l'ombre soit nulle.
5) Pour une certaine hauteur de mur, l'ombre semble infinie.

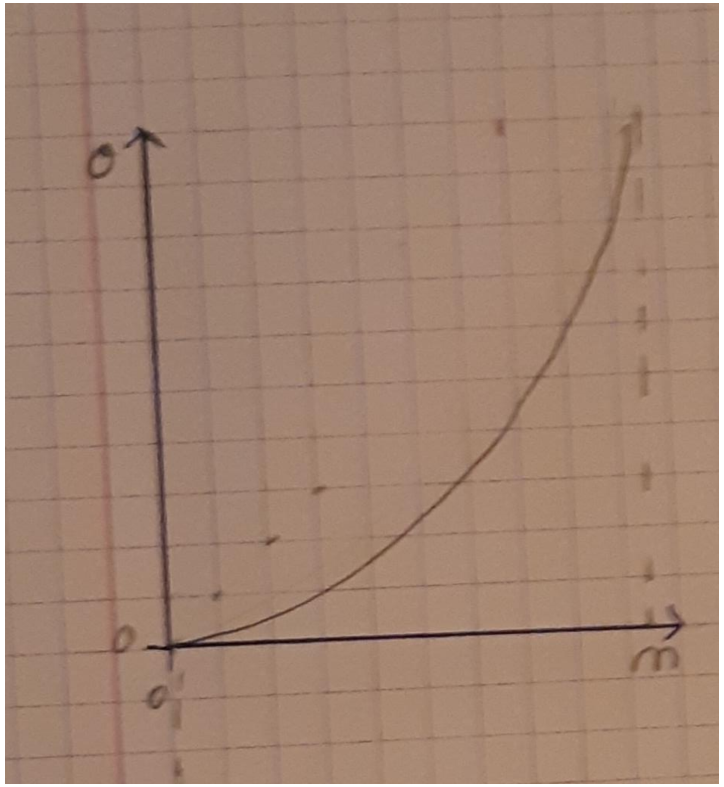
2. Phase d’expérimentation : consigne

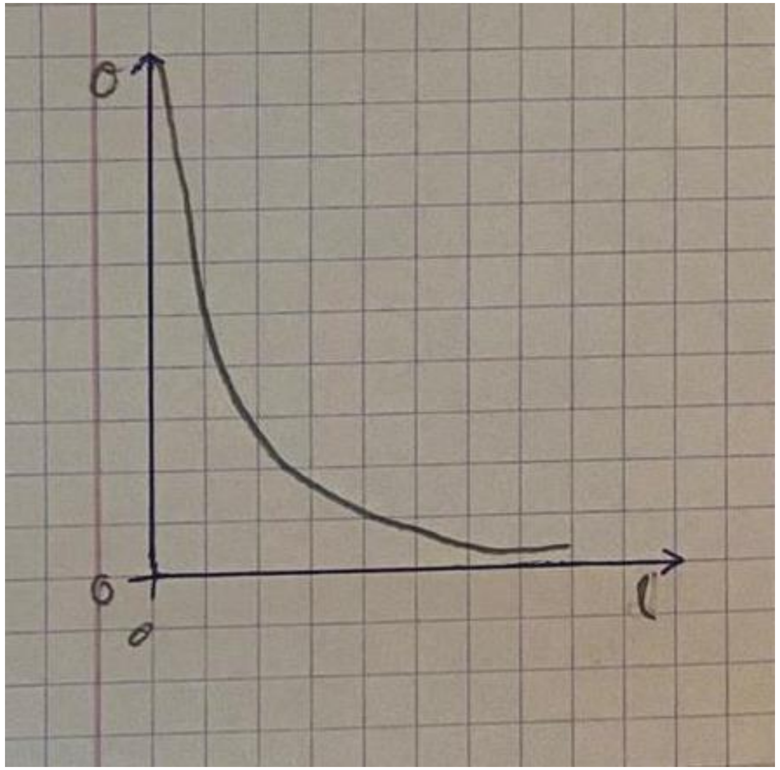
A) Tester en faisant varier un paramètre à la fois, noter les résultats, faire les graphiques correspondants (nuages de points). Un graphique pour chaque variable l, m, d.

B) A l'aide des graphiques, testez les conjectures proposées par les élèves.

Phase d’expérimentation : graphiques en nuages de points







(schémas d’élèves)

Phase d’expérimentation : vérification des conjectures des élèves

1) Plus le mur est loin plus l'ombre grandit.
2) Plus la lampe est haute plus l'ombre baisse.
3) La longueur de l'ombre augmente de moins en moins vite lorsqu'on augmente la distance entre le mur et la lampe.
4) Lorsqu'on varie la hauteur du mur, il est impossible que l'ombre soit nulle.
5) Pour une certaine hauteur de mur, l'ombre semble infinie.

Mur&Ombre-sol_modèles.ggb

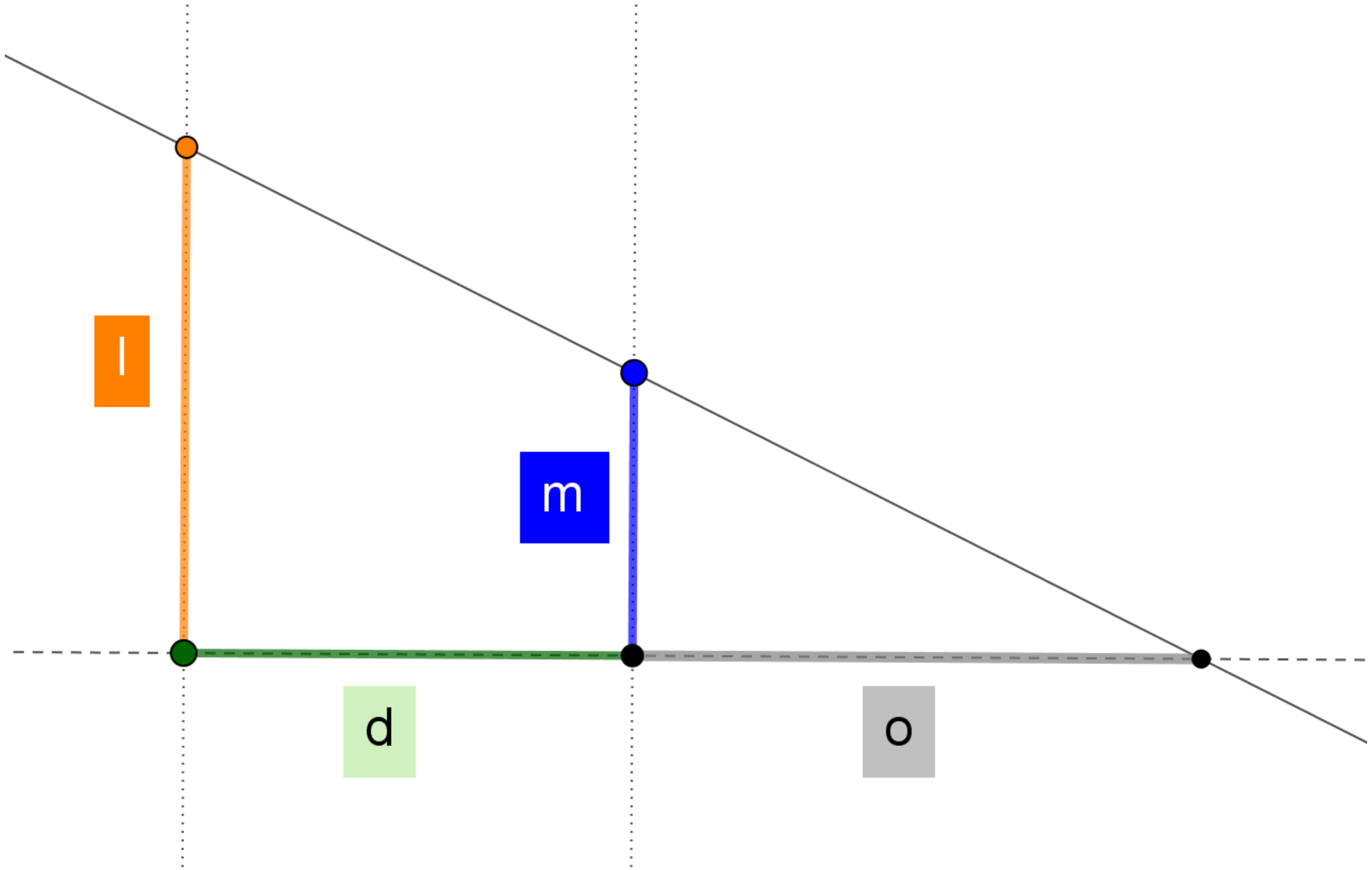
Modèles-GreoGe
bra

3. Phase de modélisation : géométrique

Pour vérifier les hypothèses et prédictions émises et pour répondre à la question de recherche, on va *modéliser* la situation.

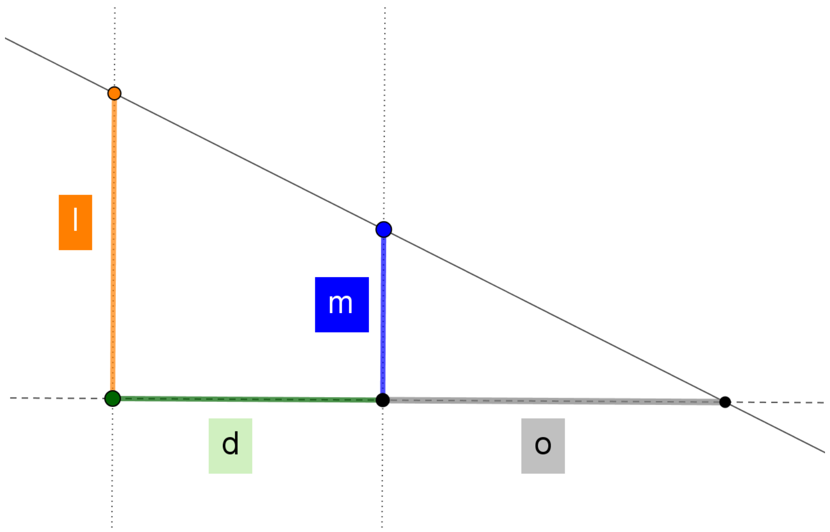
A) Faites un schéma géométrique de la situation qui rend visibles les relations entre les 4 variables.

B) Déduisez-en une relation algébrique entre celles-ci.



Modélisation géométrique

Relation algébrique entre les 4 variables



On a deux triangles rectangles emboités. On peut

- ✓reconnaitre une configuration de Thalès ;
- ✓exploiter la similitude des deux triangles ;
- ✓exprimer de deux manières la tangente de l'angle commun.

$$\frac{o}{m} = \frac{(d+o)}{l} \Leftrightarrow o = \frac{md}{(l-m)}$$

Une situation parmi d’autres

Grâce à cette relation algébrique, nous avons la confirmation qu’avec

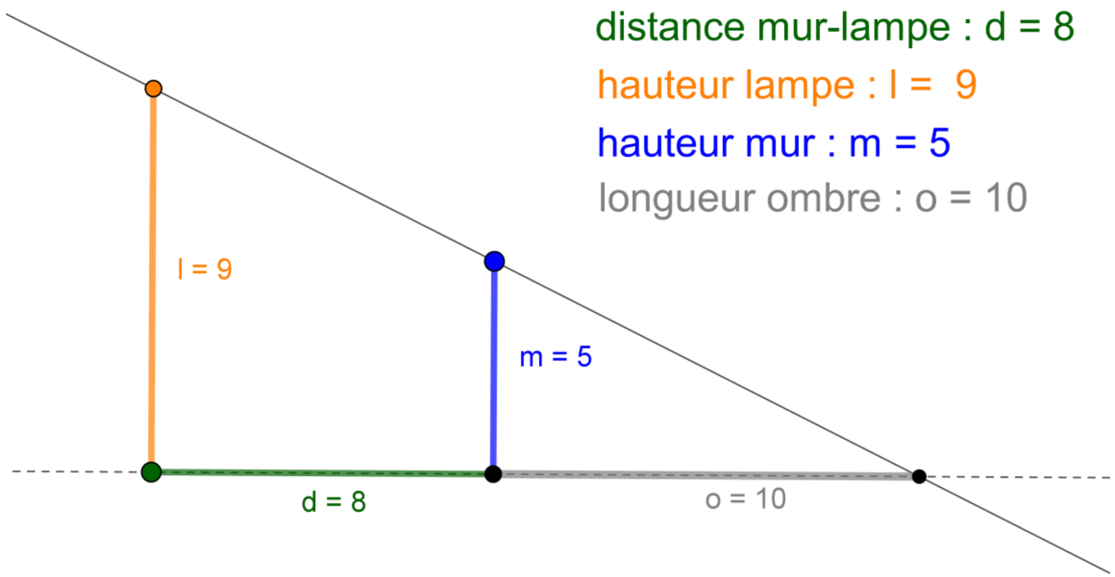
$$d = 8$$

$$l = 9$$

et $m = 5$,

nous obtenons une ombre de longueur 10 .

$$\frac{5 . 8}{(9 - 5)} = 10$$



4. Phase de modélisation : fonctionnelle

A) À partir de la relation algébrique, tirer trois modèles fonctionnels, exprimant *o* en fonction de chacune des autres variables. Pour les paramètres à fixer, choisir les valeurs

$$d = 8,$$

$$l = 9,$$

$$m = 5.$$

B) Tracez les 3 graphes correspondants sur GeoGebra.

Les trois modèles fonctionnels

$$o(d) = \frac{5\,d}{(9-5)} = 1{,}25\,d$$ avec m= 5 et l= 9

$$o(l) = \frac{5\,.\,8}{(l-5)} = \frac{40}{(l-5)}$$ avec d= 8 et m= 5

$$o(m) = \frac{8\,m}{(9-m)}$$ avec d= 8 et l= 9

Modèles-GreoGe
bra

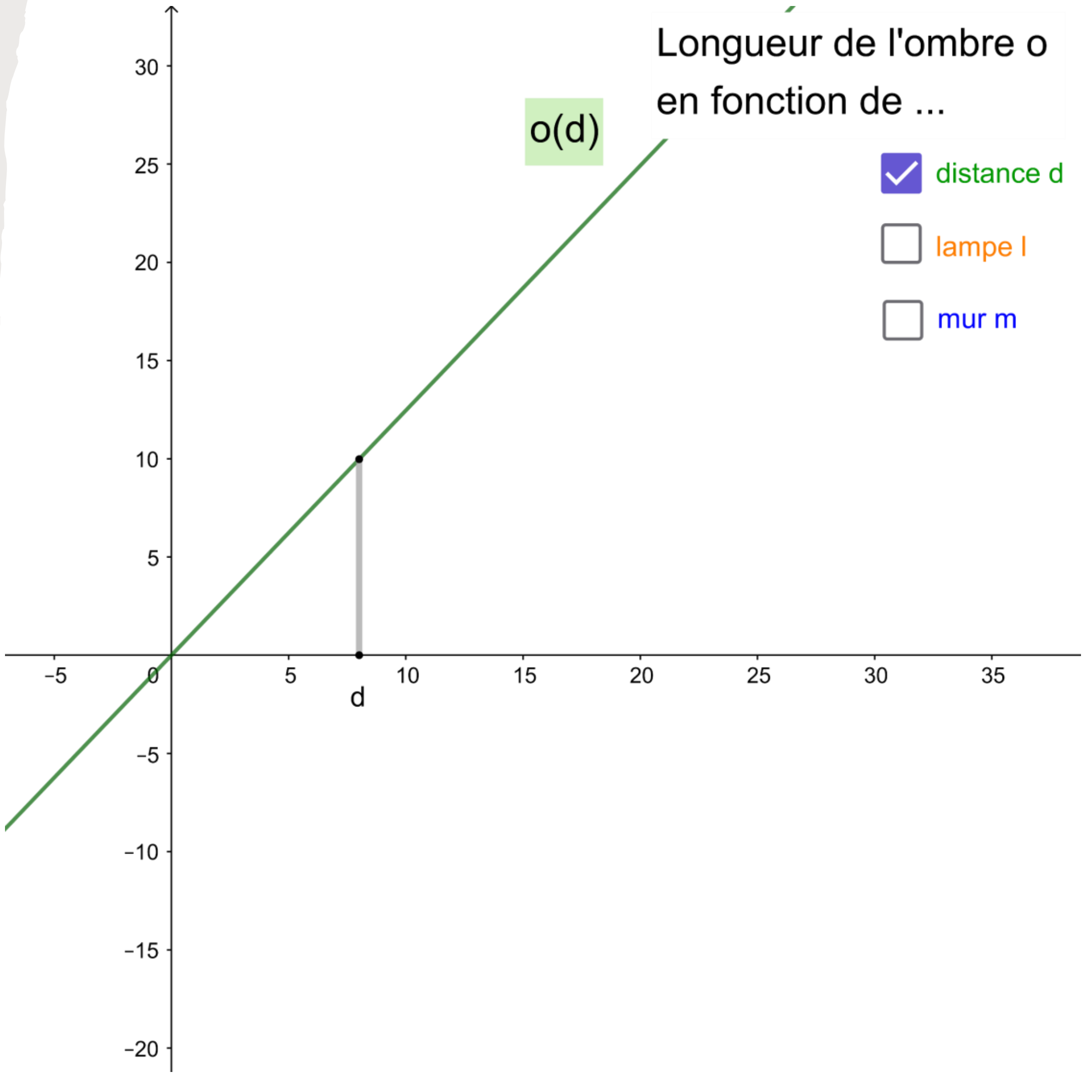
Représentation graphique des trois modèles

$$o(d) = \frac{5\,d}{(9\ -\ 5)} = 1{,}25\,d$$

fonction *linéaire* de type

$$f\,(x) = ax$$

o est proportionnel à *d*

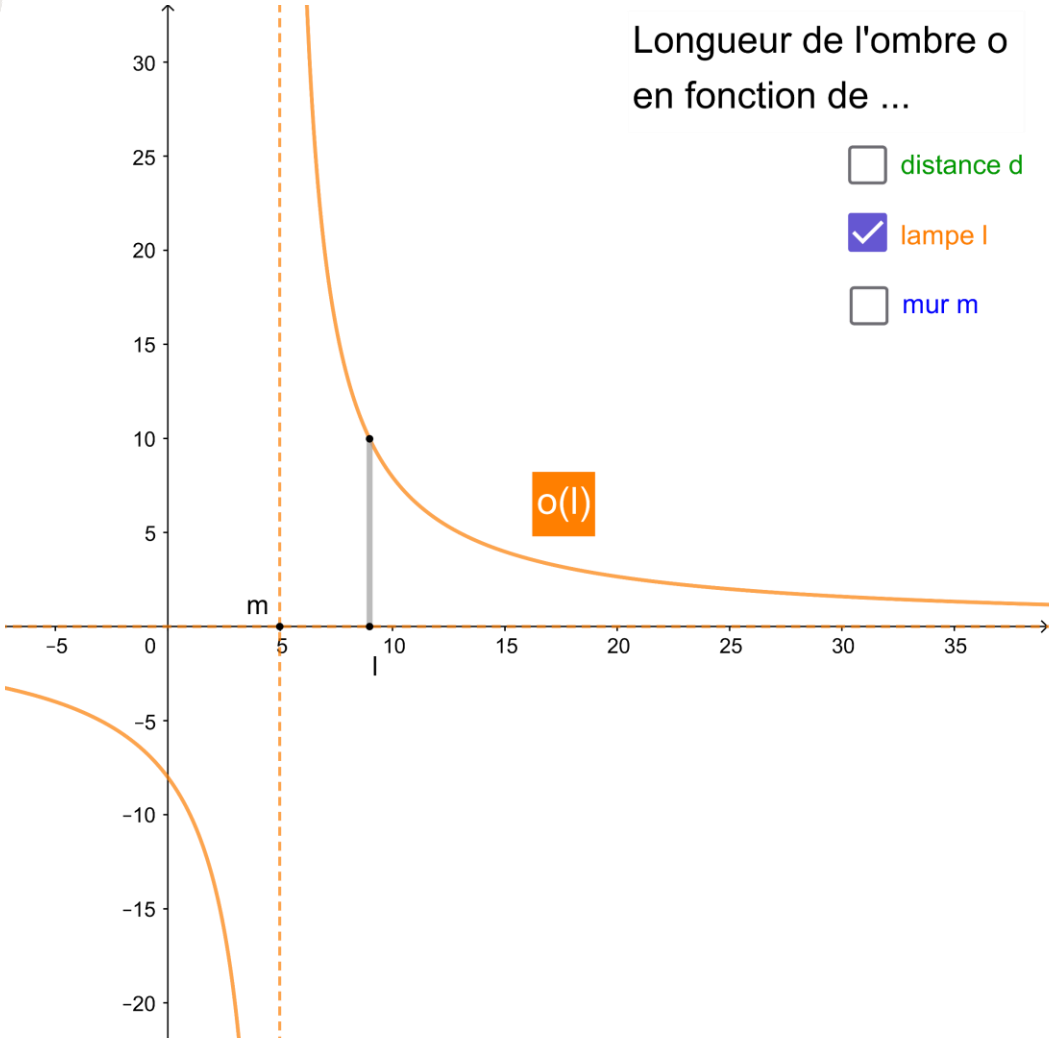


Représentation graphique des trois modèles

$$o(l) = \frac{40}{(l\ - 5)}$$

fonction *homographique* de type

$$f(x) = \frac{c}{ax + b}$$

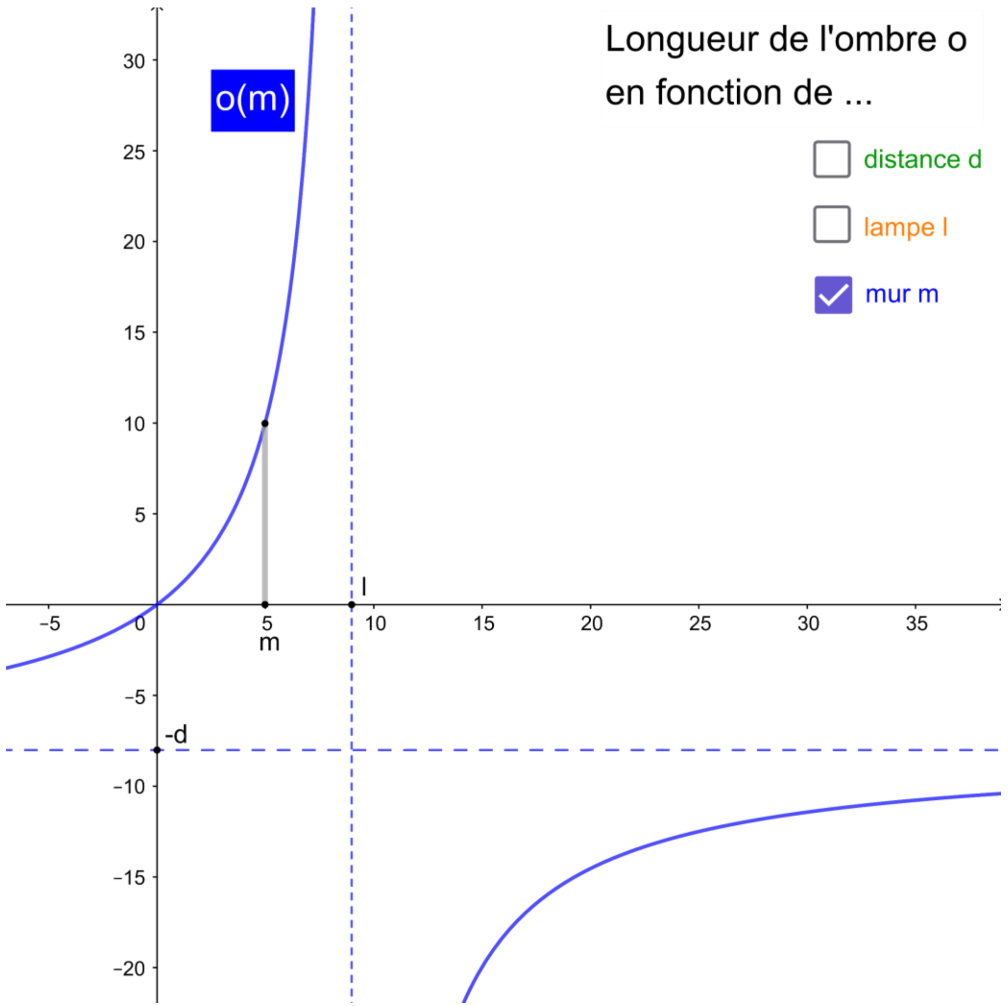


Représentation graphique des trois modèles

$$o(m) = \frac{8\,m}{(9\ -\ m)}$$

fonction *homographique* de type

$$f(x) = \frac{cx}{ax + b}$$



5. Phase d'interprétation : réponse à la question de départ et retour sur les conjectures

À partir d'une situation quelconque donnée, comment faire varier les paramètres pour doubler à coup sûr la longueur de l'ombre ?

$$o(d) = \frac{m}{(l - m)} d$$

Coefficient de proportionnalité k

$o(d)$ est une *fonction linéaire* : il y a proportionnalité entre *o* et *d*.

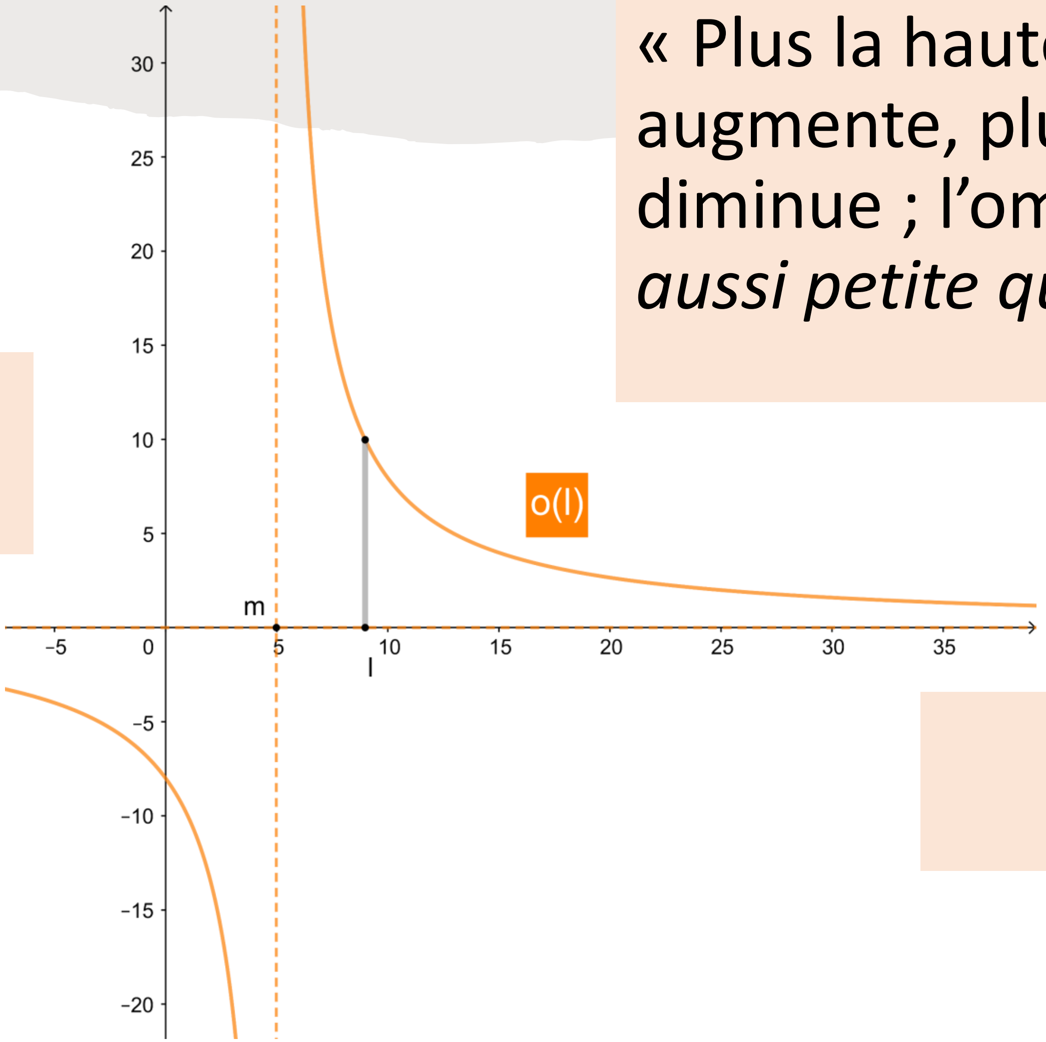
Cela veut dire que si on double, triple,… la distance entre la lampe et le mur, on doublera, triplera,… la longueur de l'ombre.

Interprétation des modèles : lien entre les différentes représentations

« Plus la hauteur de la lampe augmente, plus l’ombre diminue ; l’ombre devient *aussi petite que l’on veut* »

Asymptote horizontale

en y = 0

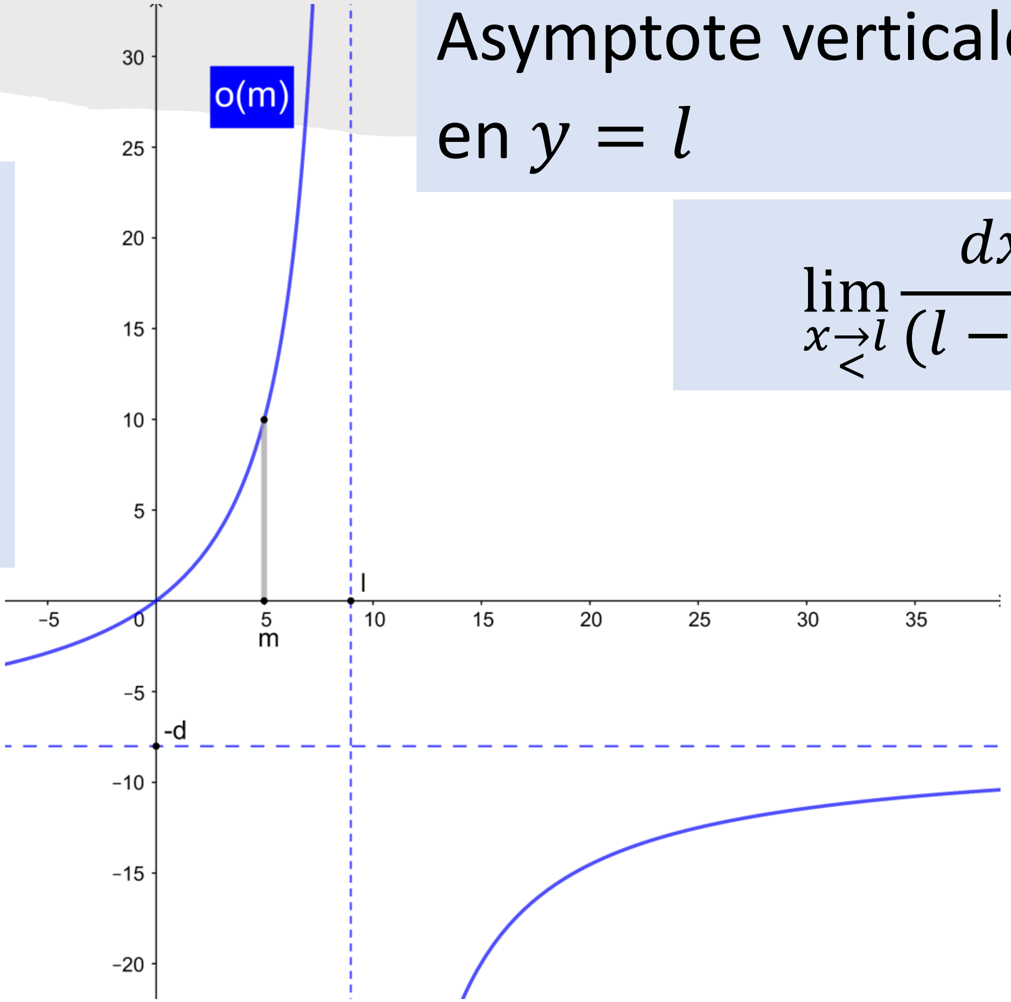


$$\lim_{x \to +\infty} \frac{40}{(x-5)} = 0$$

Modèles-GreoGebra

Interprétation des modèles : lien entre les différentes représentations

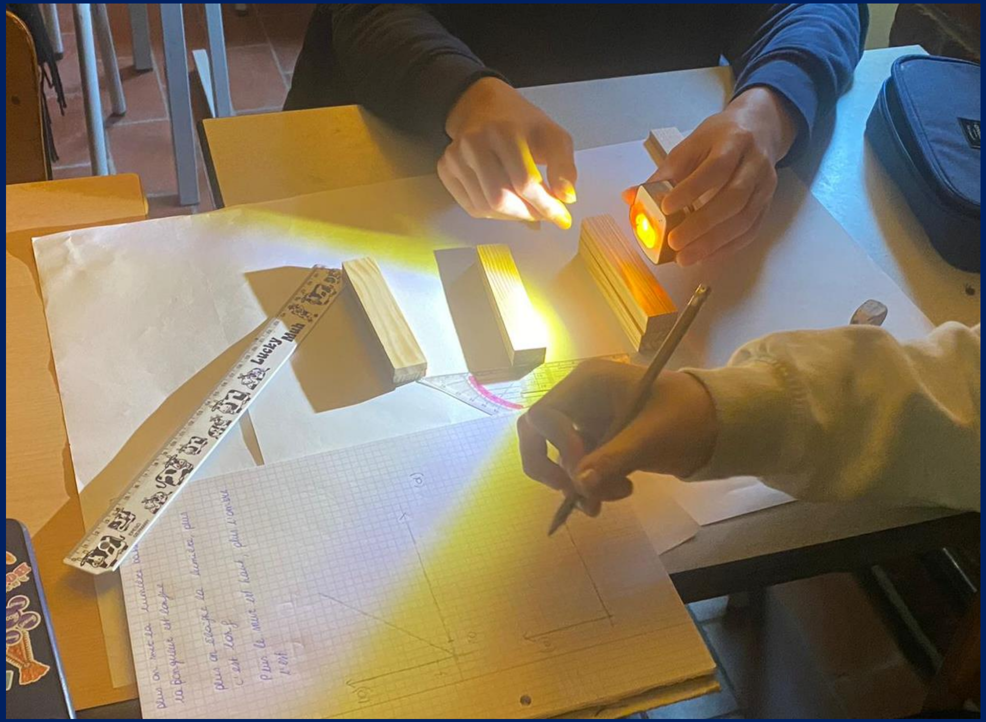
« Plus la hauteur du mur se rapproche de celle de la lampe, plus l'ombre grandit ; l'ombre devient *aussi grande que l'on veut* »



Asymptote verticale en $y = l$

$$\lim_{\substack{x \to l \\ <}} \frac{dx}{(l-x)} = +\infty$$

Modèles-GreoGebra



Échos des classes et quelques commentaires méthodologiques

Jusqu’où les élèves ont-ils pu aller ?

1. Présentation du problème
2. Phase de recherche en groupe
3. Première mise en commun
4. Phase de recherche d'une modélisation en groupe
5. Mise en commun avec l'ensemble de la classe

Plusieurs relances étaient prévues

Enormément de difficultés sur la schématisation, les élèves n'ont pu le faire seuls

Selon les classes

- Partie algébrique exposée ou développée par les élèves
- Analyse d'une ou de plusieurs fonctions
- Lien avec la géométrie plus ou moins développé

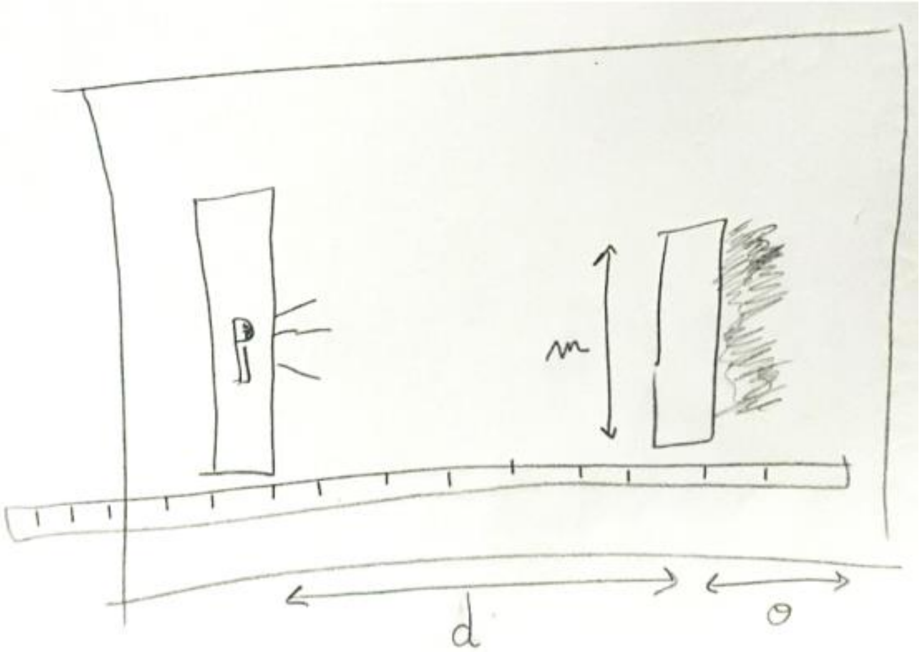
Jusqu'où les élèves ont-ils pu aller ?

- Plusieurs relances étaient prévues

Bloqués	Découragés	Performants
Faire varier un paramètres à la fois	Activité plus guidée, étude des paramètres l'un après l'autre	Guidage vers la modélisation
Pour chaque paramètre, observer le comportement de l'ombre	Fiche de travail à compléter avec des séries de questions pour chaque paramètre	Schéma de la situation et détermination des équations en jeu

La modélisation géométrique : un réel obstacle!

- **Percevoir l'utilité de la représentation géométrique.** Les élèves ne s'attendent pas à ce qu'une représentation géométrique débouche sur des équations de fonctions et des graphiques.



5G/4h

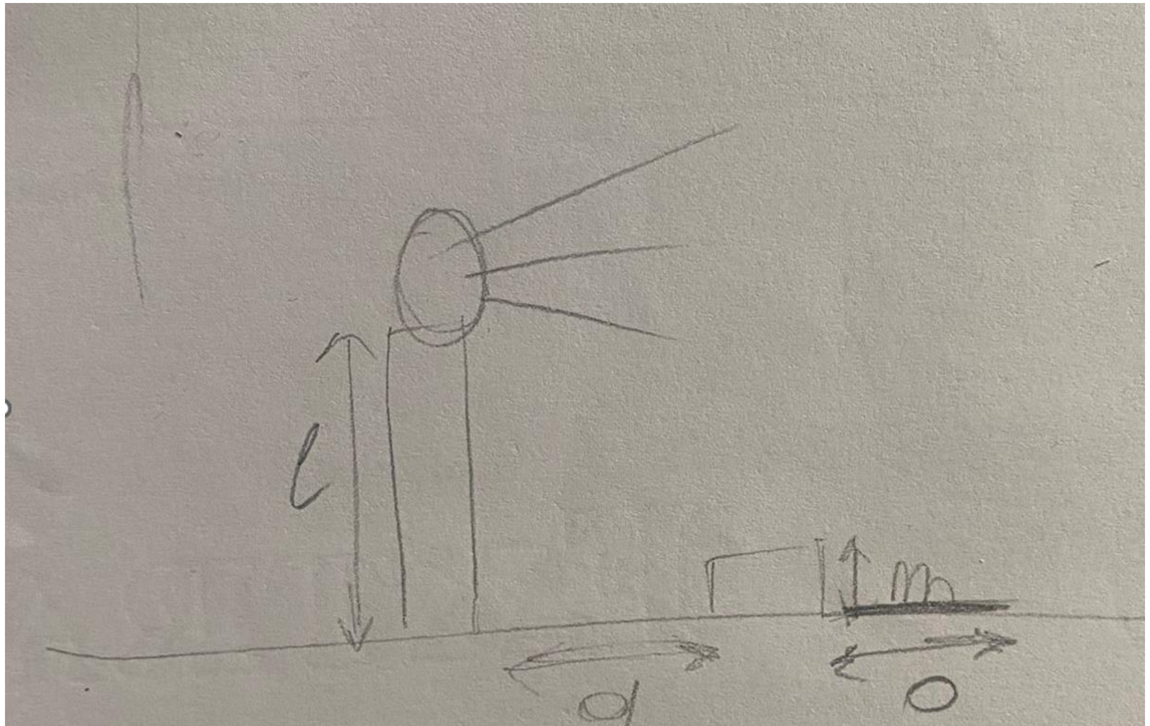
La modélisation géométrique : un réel obstacle!

- **Percevoir l’utilité de la représentation géométrique.** Les élèves ne s'attendent pas à ce qu'une représentation géométrique débouche sur des équations de fonctions et des représentations graphiques.
- **Visualiser le lien entre les paramètres.** Sur de nombreux schémas, les éléments du dispositif apparaissent isolés ; les variables ne sont pas mises en relation.

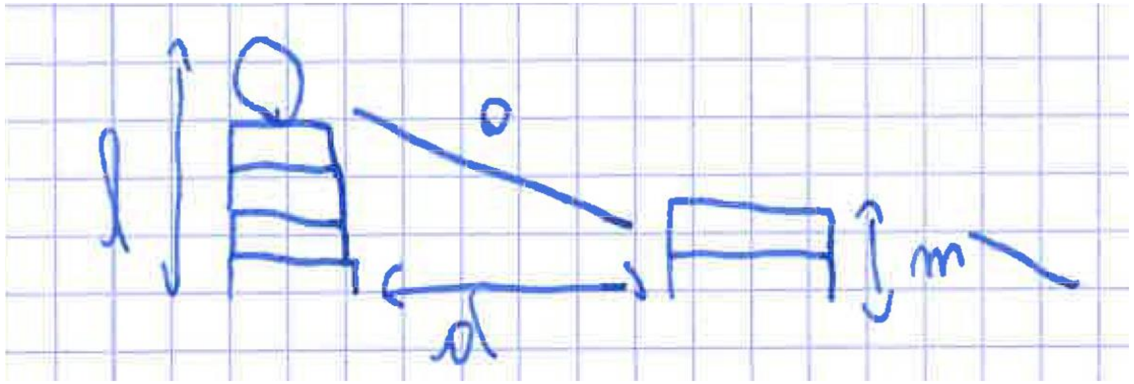
Visualiser le lien entre les paramètres

Consigne donnée : "Faites un schéma représentant la situation, qui permette de visualiser les relations entre les 4 variables. "

Résultat : quasi pas de schémas concluants au 1er essai !



5G/7h



5G/4h (après l’acti)

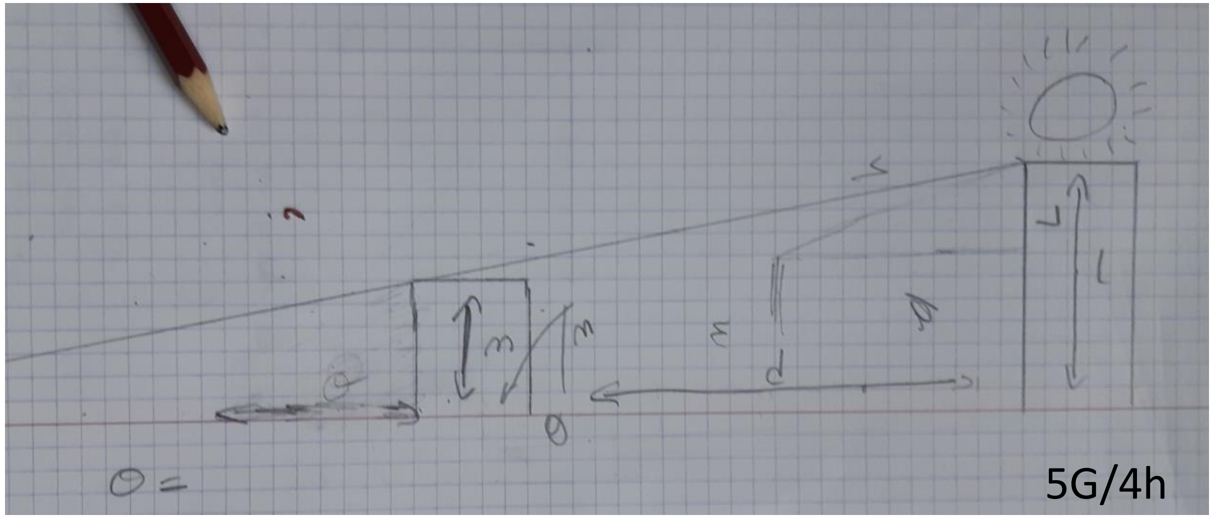
Visualiser le lien entre les paramètres

Nous donnons des précisions

« Il faut qu'on voie sur le schéma le lien, la dépendance, entre l'ombre et les autres variables. »

« Montrez sur votre schéma d'où vient la longueur de cette ombre, là »

… pas toujours avec succès. La difficulté est réelle !



Visualiser le lien entre les paramètres

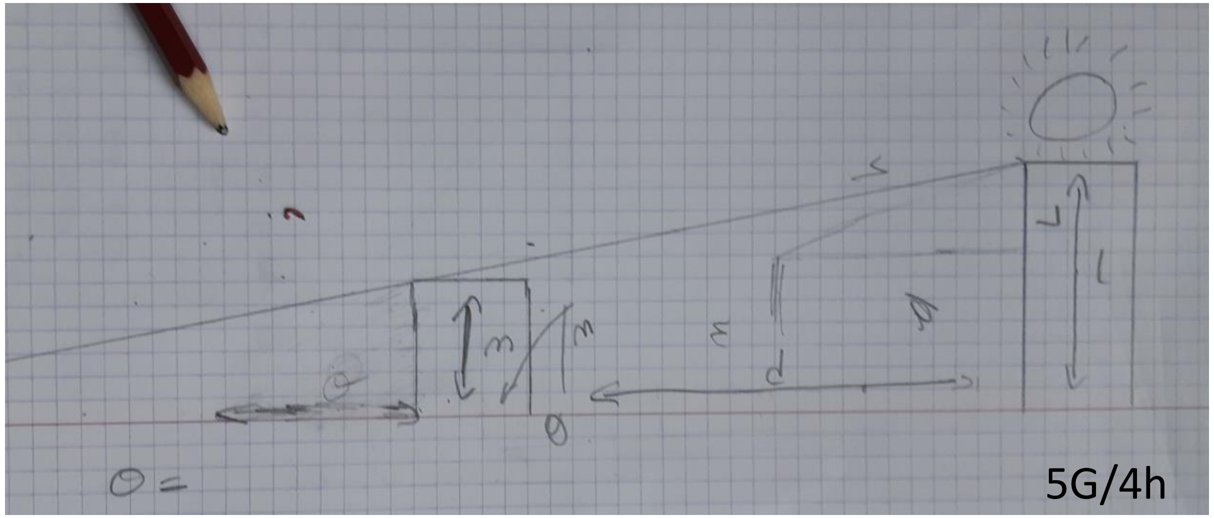
Nous donnons des précisions

« Il faut qu'on voie sur le schéma le lien, la dépendance, entre l'ombre et les autres variables »

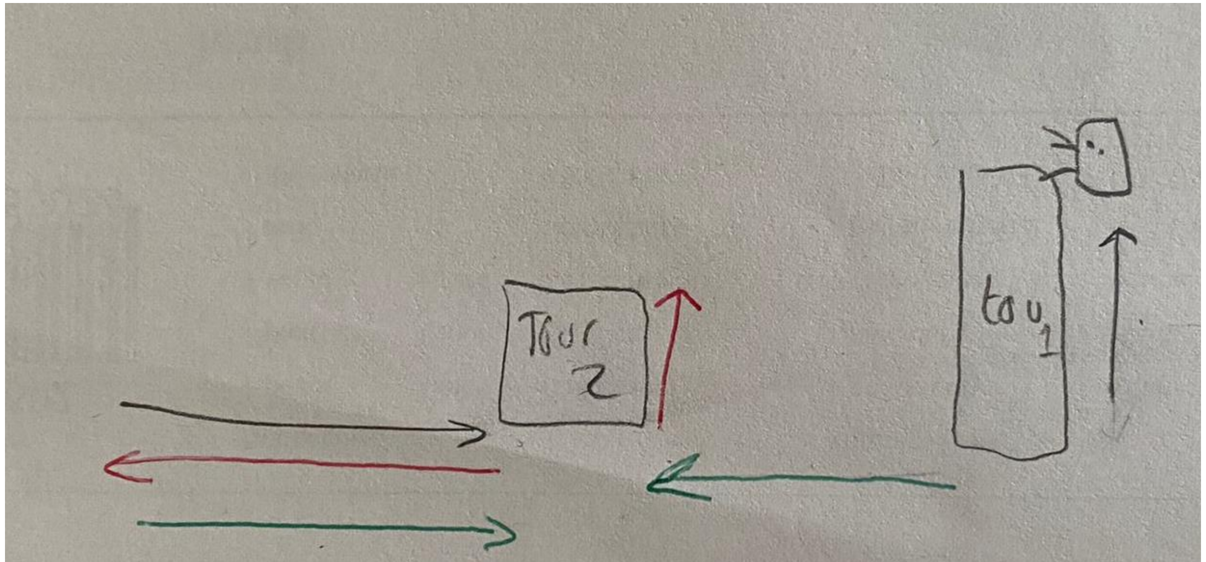
« Montrez sur votre schéma d’où vient la longueur de cette ombre, là »

… pas toujours avec succès. La difficulté est réelle !

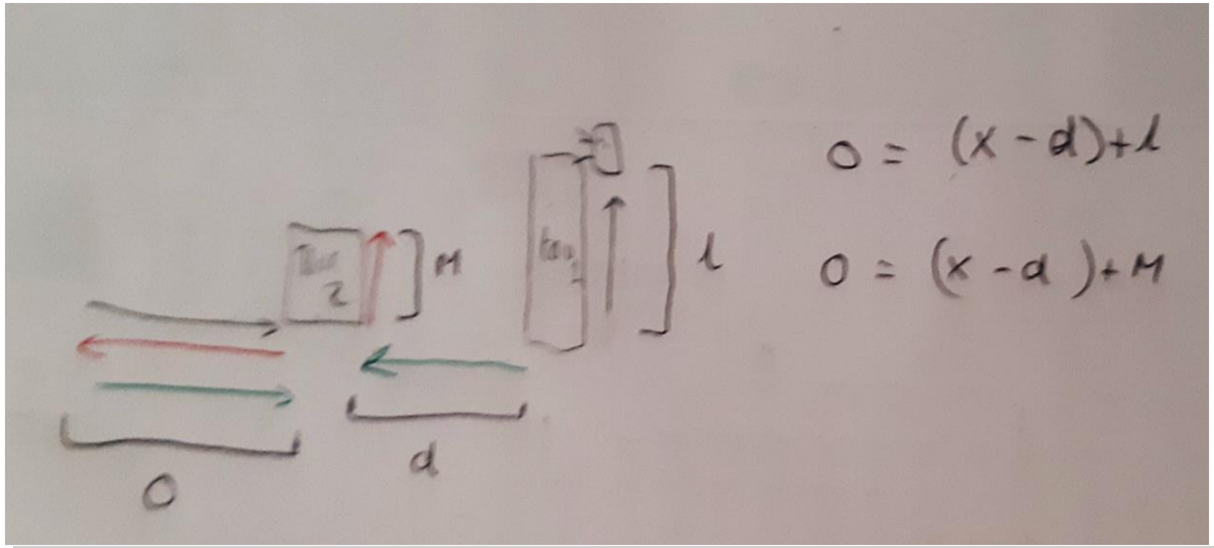
défi pour de futurs travaux du GEM !



Visualiser le lien entre les paramètres

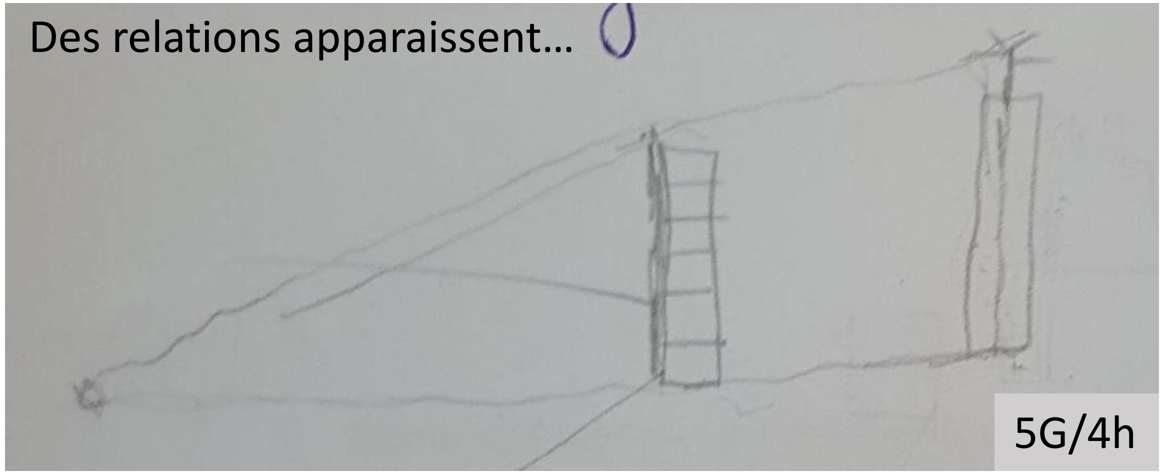


5G/7h 1er essai de bonnes élèves de 5ème "maths fortes"



5G/7h après précision de la consigne

Des relations apparaissent…



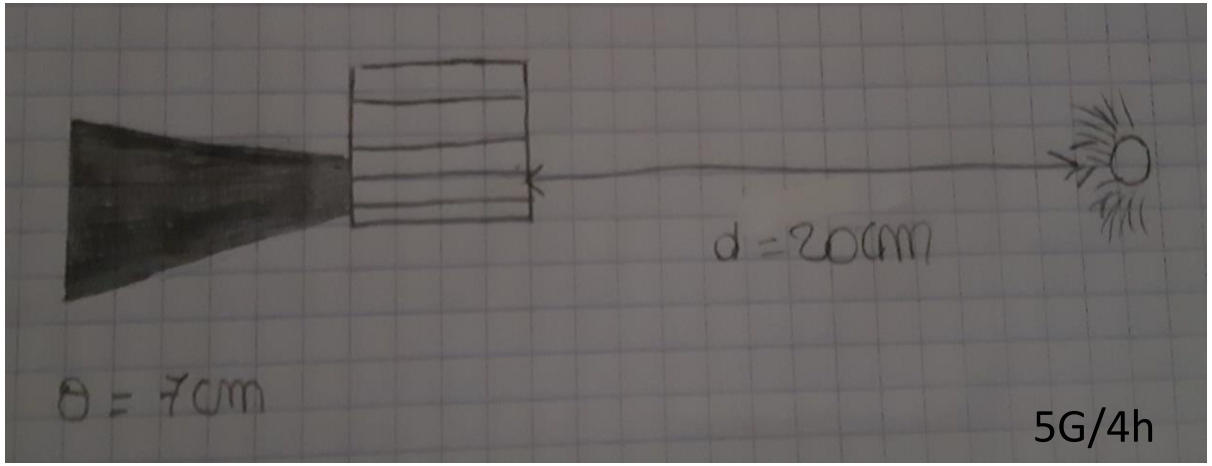
5G/4h

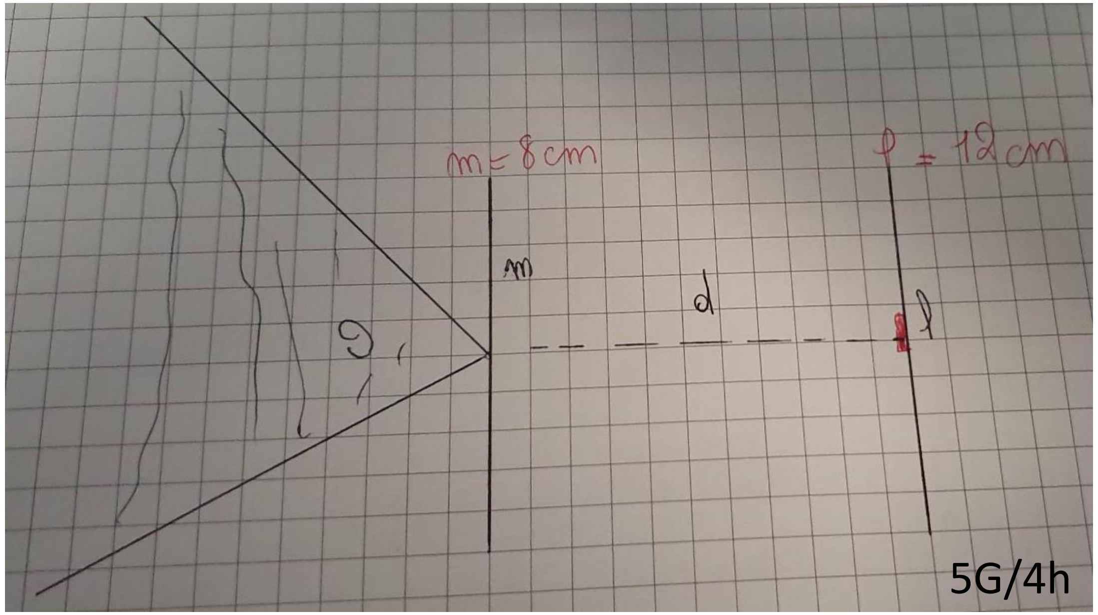
La modélisation géométrique : un réel obstacle!

- **Percevoir l’utilité de la représentation géométrique.** Les élèves ne s'attendent pas à ce qu'une représentation géométrique débouche sur des équations de fonctions et des représentations graphiques.
- **Visualiser le lien entre les paramètres.** Sur de nombreux schémas, les éléments du dispositif apparaissent isolés ; les variables ne sont pas mises en relation.
- **Choisir un point de vue adéquat.** De haut, de profil ou en perspective ?

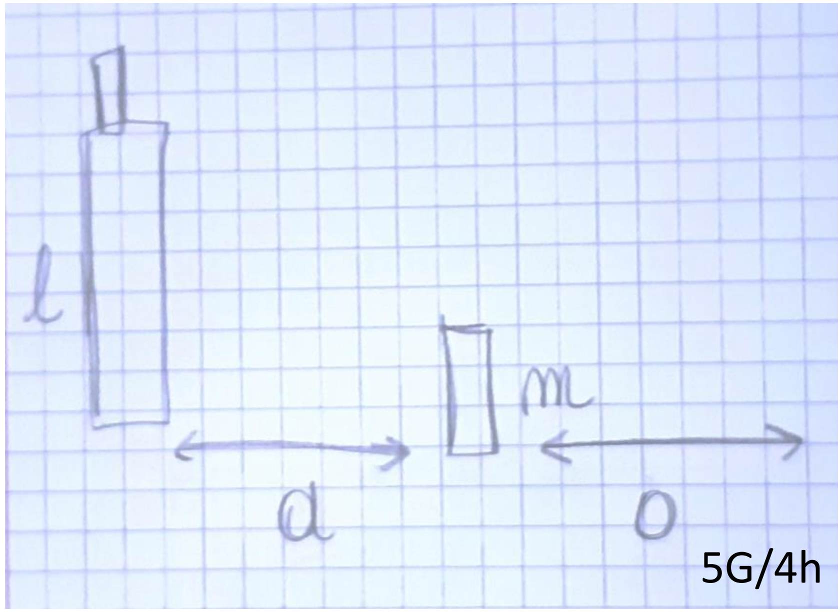
Choisir un point de vue adéquat

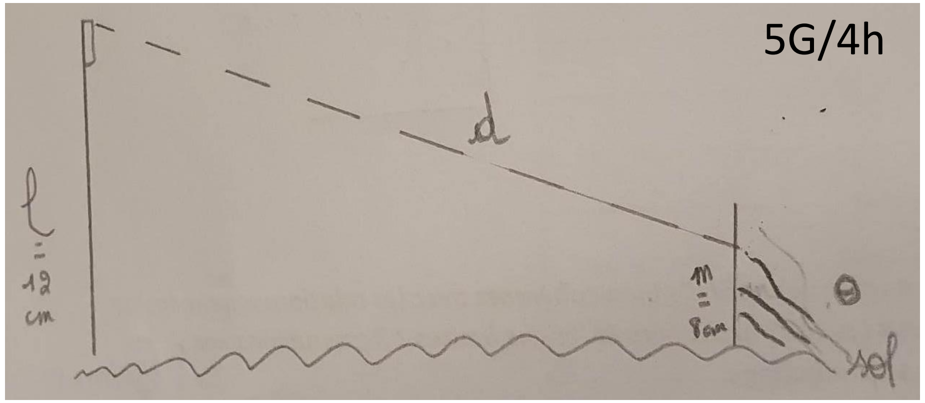
Vue de haut





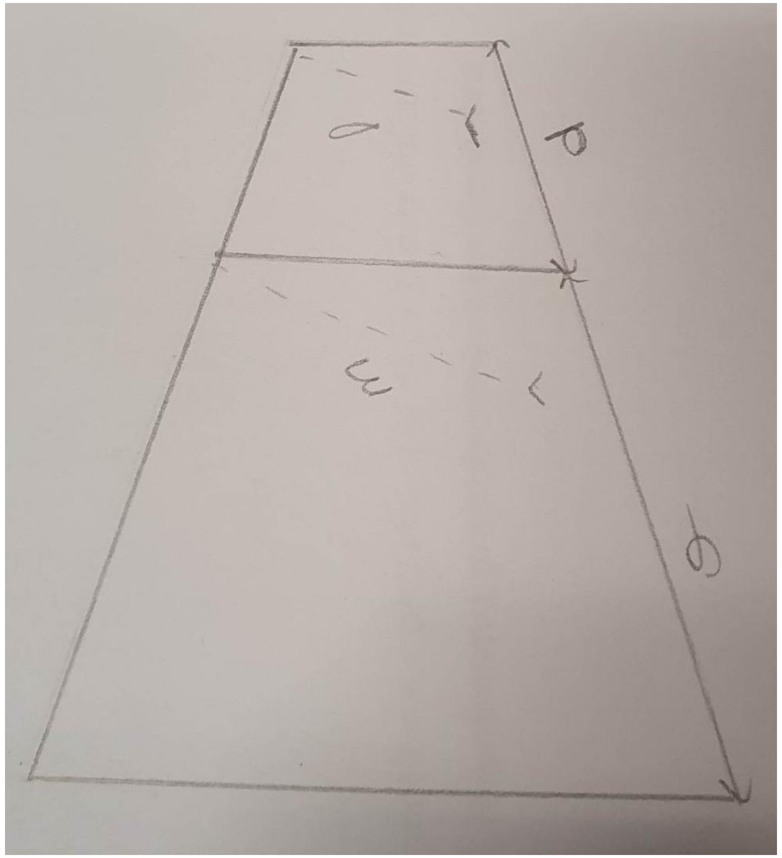
Vue de profil

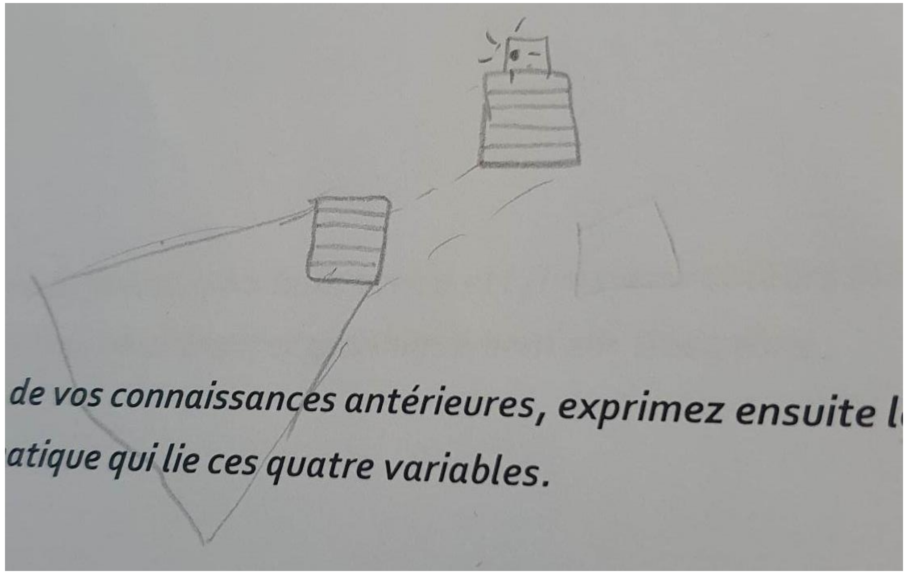


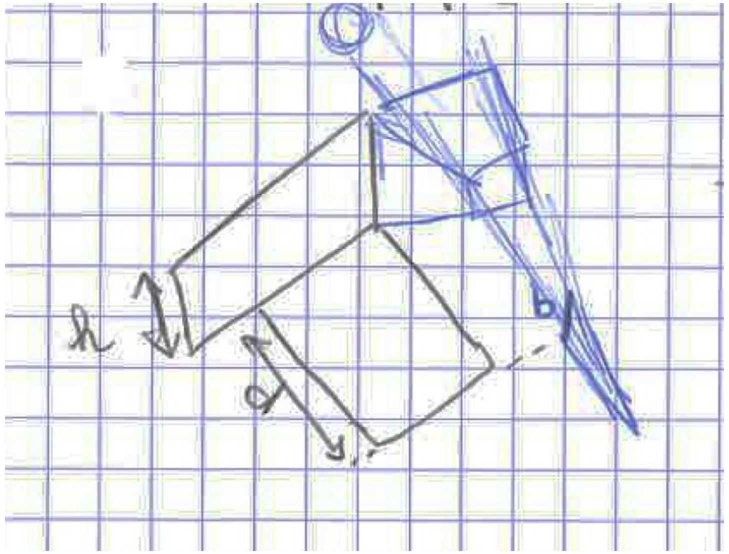


Choisir un point de vue adéquat

Vue « en perspective »





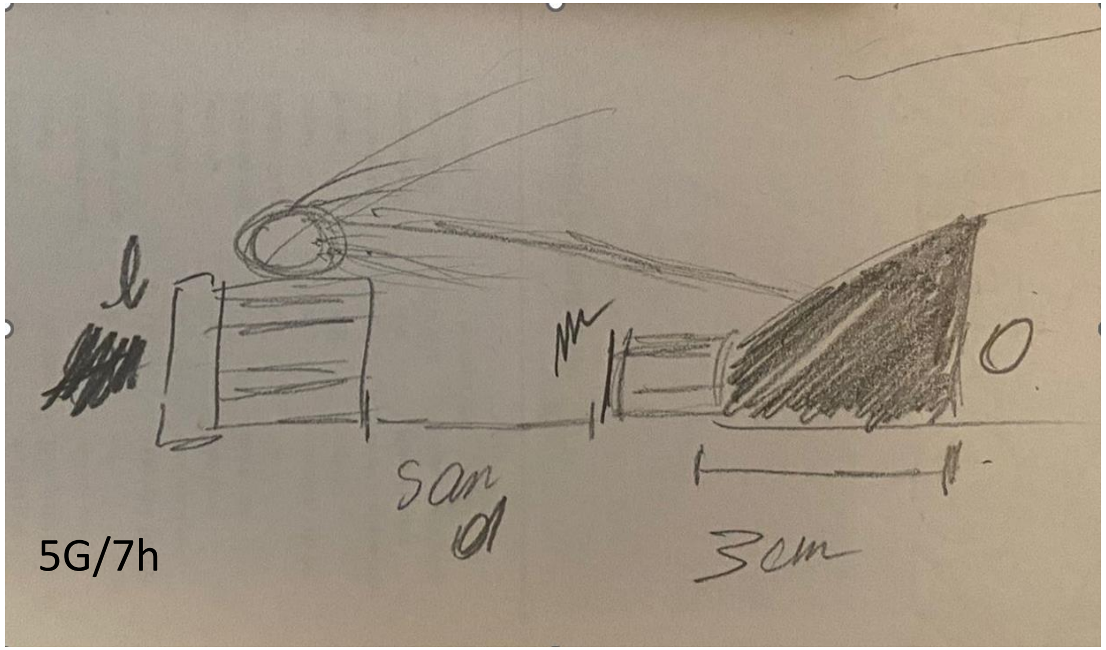


La modélisation géométrique : un réel obstacle!

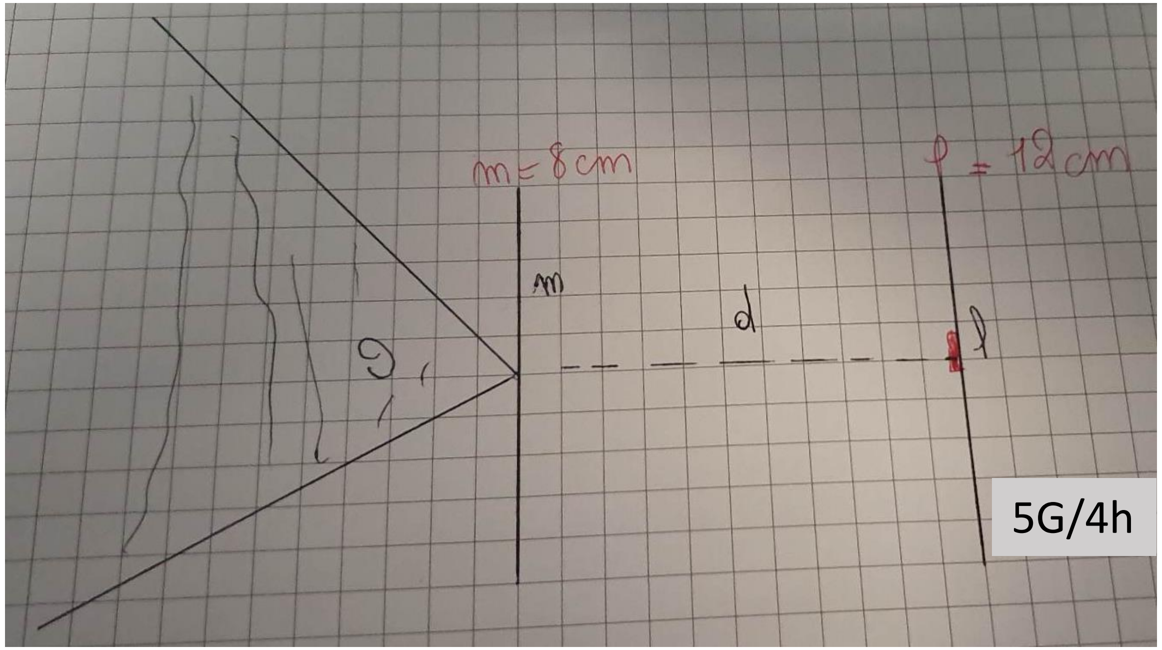
- **Percevoir l'utilité de la représentation géométrique.** Les élèves ne s'attendent pas à ce qu'une représentation géométrique débouche sur des équations de fonctions et des représentations graphiques.
- **Visualiser le lien entre les paramètres.** Sur de nombreux schémas, les éléments du dispositif apparaissent isolés ; les variables ne sont pas mises en relation.
- **Choisir un point de vue adéquat.** De haut, de profil ou en perspective ?
- **Représenter l'ombre.** Est-ce une portion d'espace, une surface ou une ligne ? Comment la délimiter ?

Représenter l'ombre

- Difficulté à combiner l'idée d'une « zone d'ombre » avec le statut de longueur ?



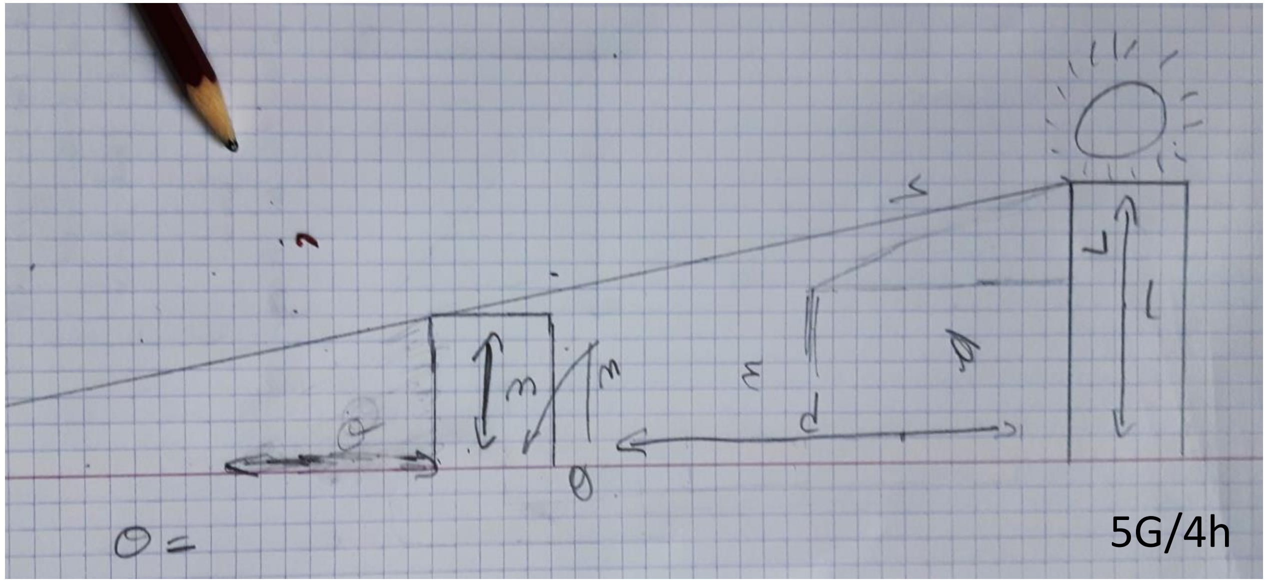
5G/7h



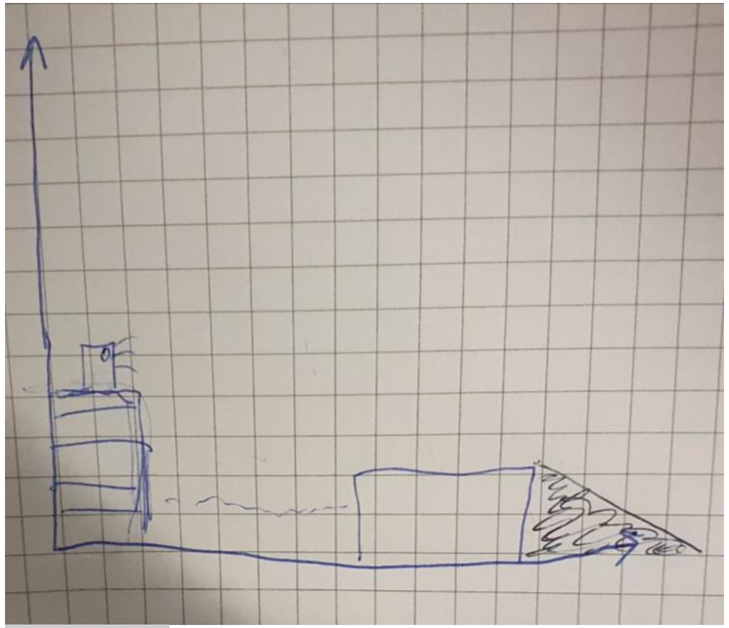
5G/4h

Représenter l’ombre

- Difficulté à visualiser (et représenter!) le rayon lumineux comme délimitateur de l’ombre ou de la zone d’ombre.



5G/4h



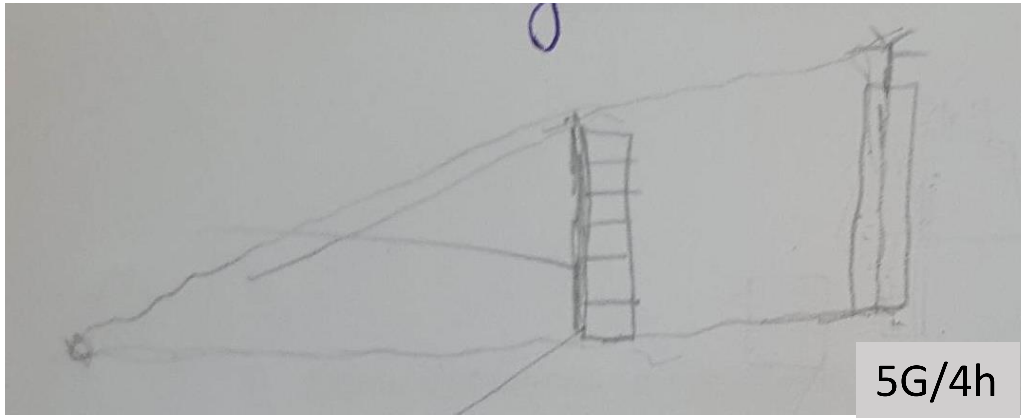
5G/4h

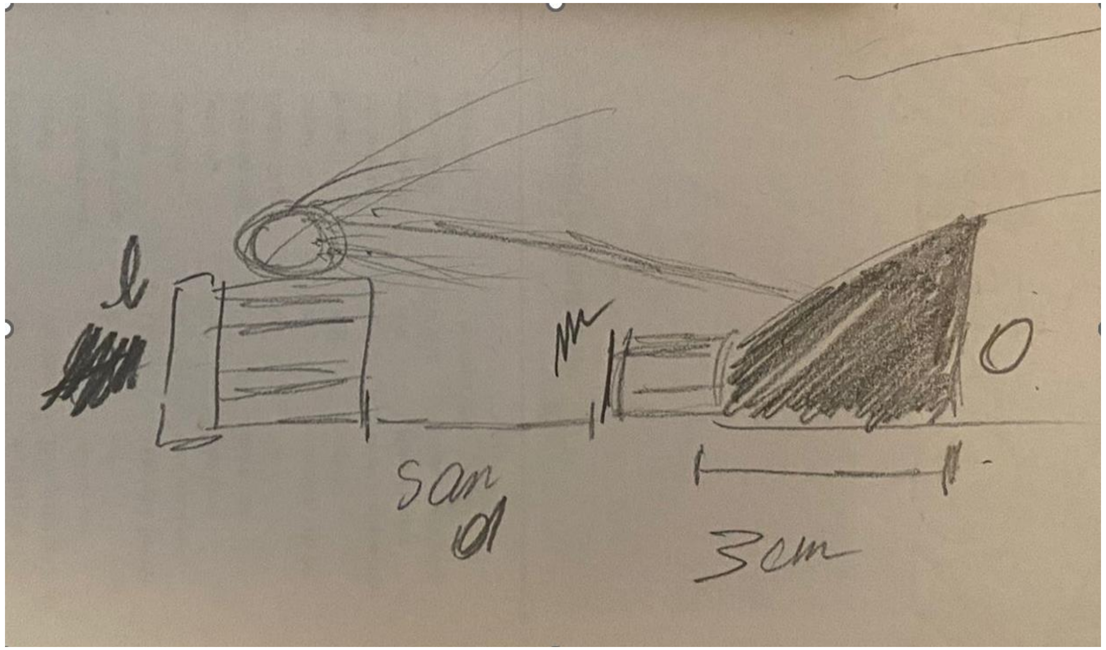
La modélisation géométrique : un réel obstacle!

- **Percevoir l'utilité de la représentation géométrique.** Les élèves ne s'attendent pas à ce qu'une représentation géométrique débouche sur des équations de fonctions et des représentations graphiques.
- **Visualiser le lien entre les paramètres.** Sur de nombreux schémas, les éléments du dispositif apparaissent isolés ; les variables ne sont pas mises en relation.
- **Choisir un point de vue adéquat.** De haut, de profil ou en perspective ?
- **Représenter l'ombre.** Est-ce une portion d'espace, une surface ou une ligne ? Comment la délimiter ?
- **Se détacher de la situation concrète.** Capacité d'abstraction : passer de représentations d'objets concrets à des objets mathématiques.

Se détacher de la situation concrète

Des représentations encore attachées aux objets concrets

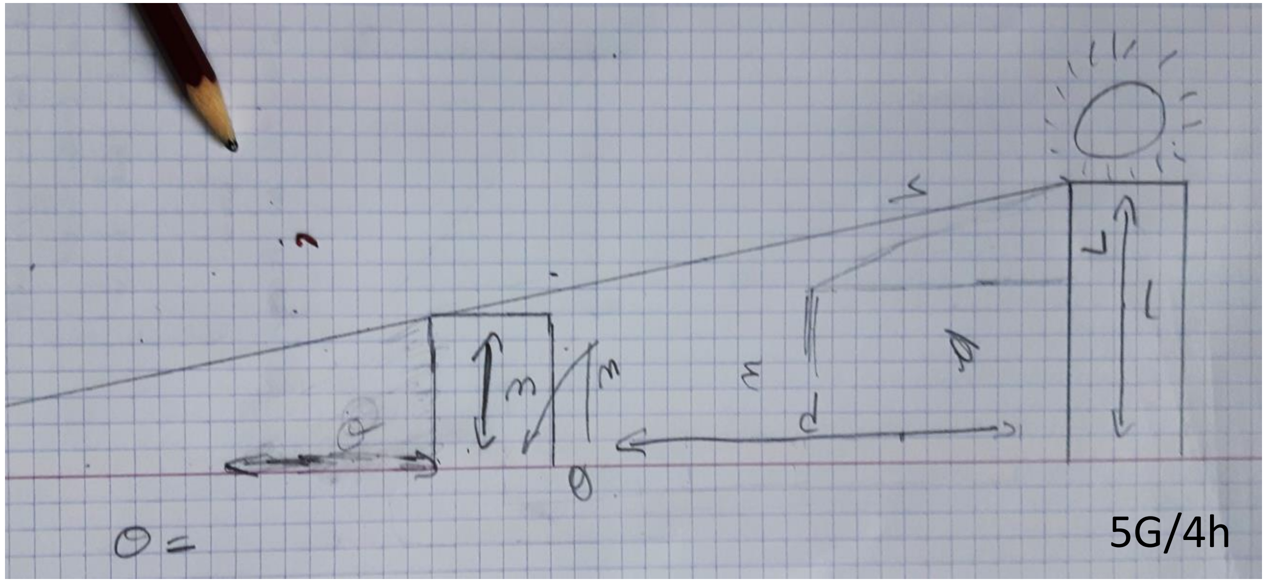




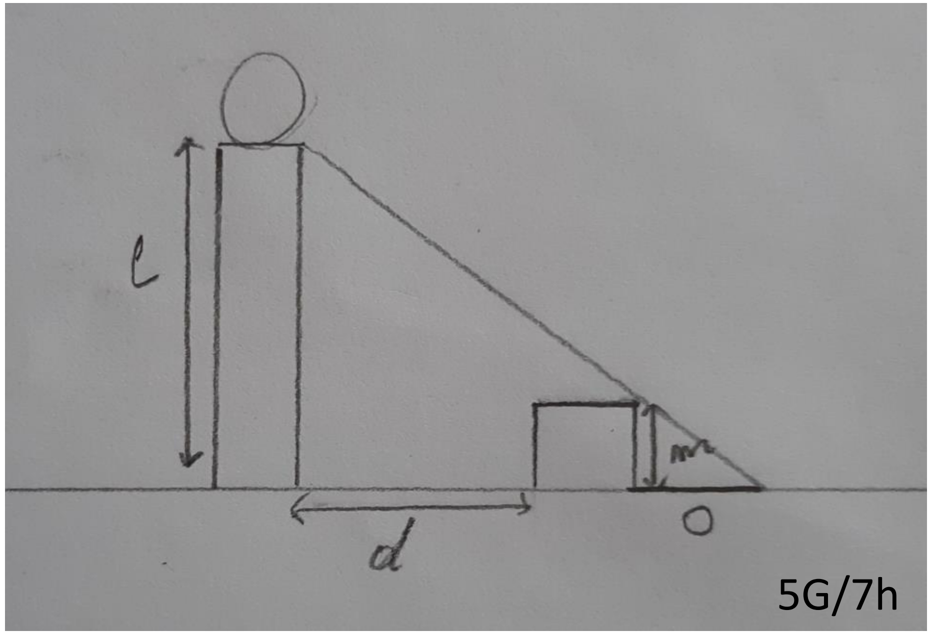
Notre réaction : « Essayez d'épurer votre schéma pour ne garder que des objets mathématiques (points, droites, cercles…). »

Vers davantage d’abstraction

Des figures géométriques apparaissent, mais ne sont pas forcément interprétées comme objets mathématiques.



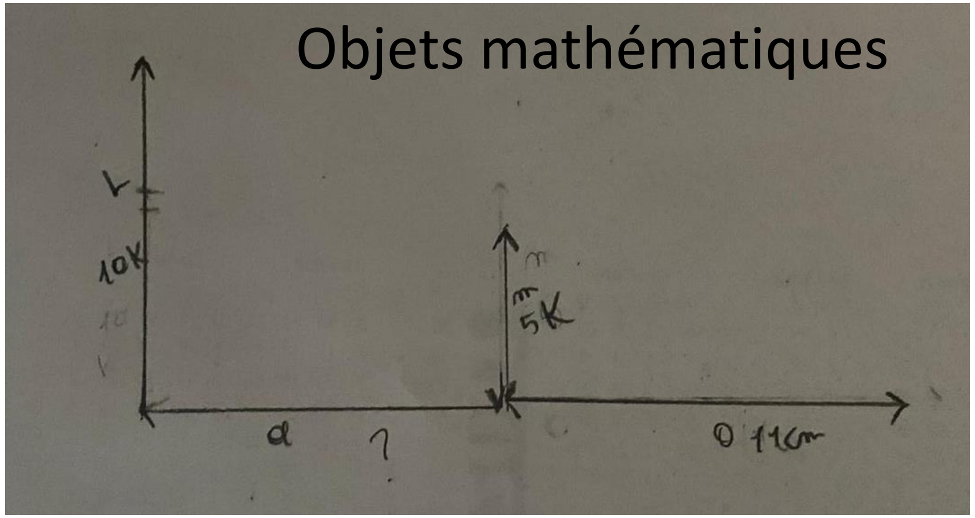
5G/4h



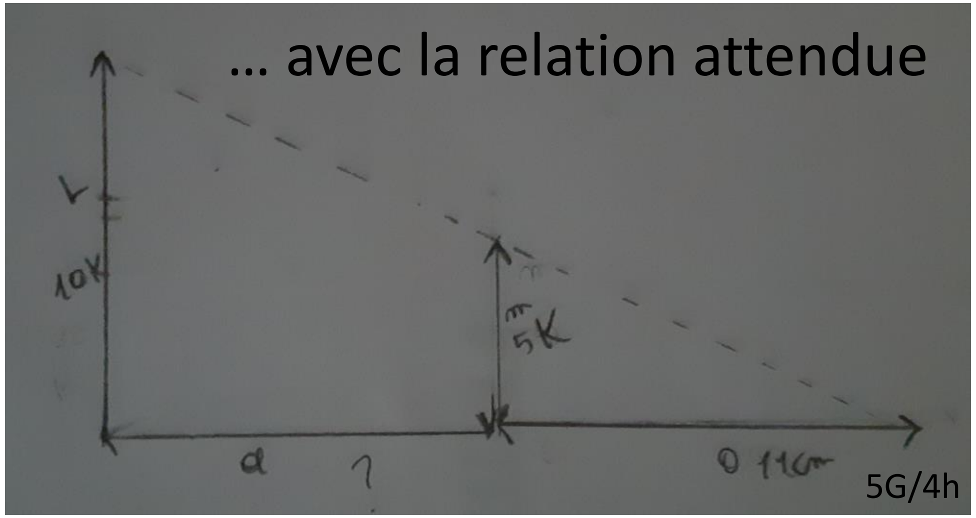
5G/7h

Vers des figures mathématiques

Plusieurs groupes parviennent à un modèle exploitable pour la suite…

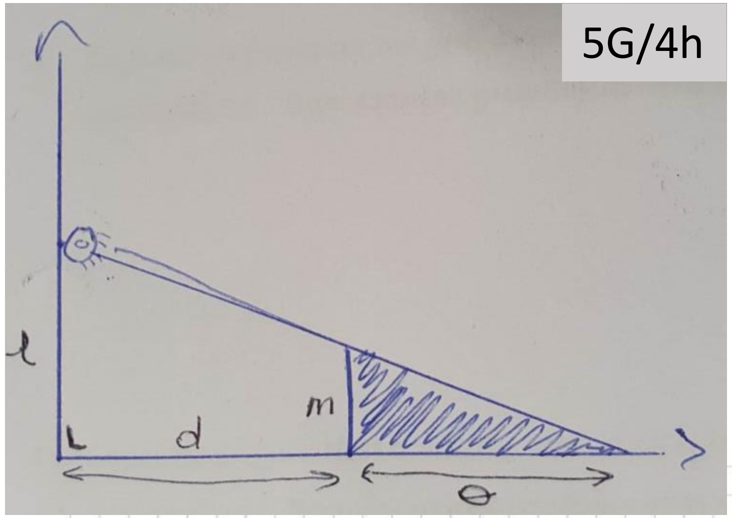


Objets mathématiques

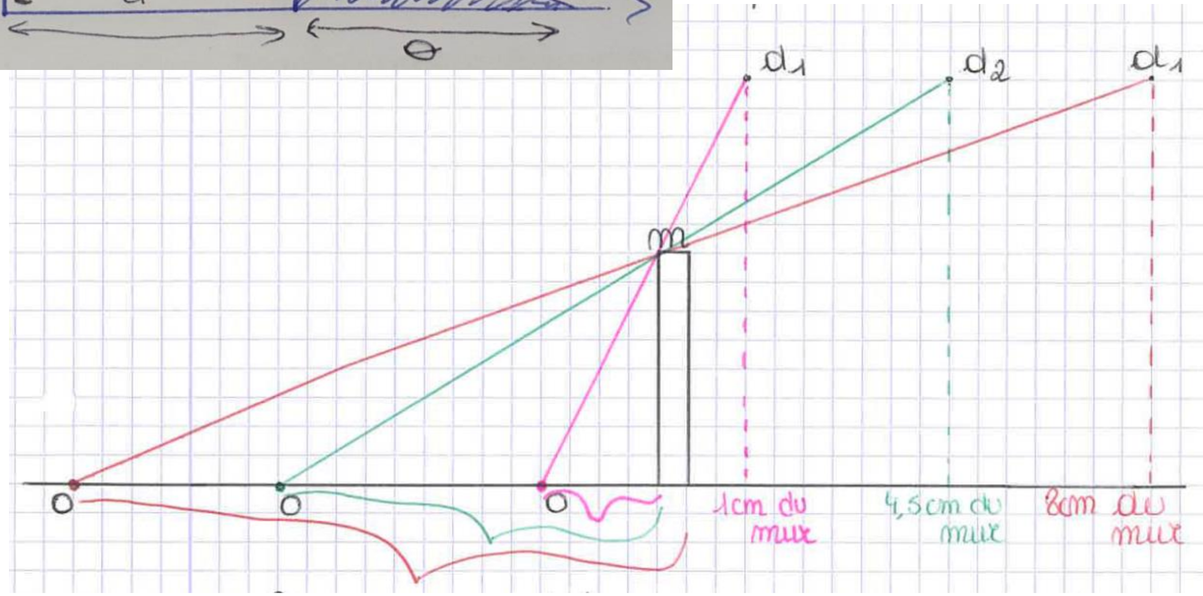


… avec la relation attendue

5G/4h



5G/4h



Les difficultés de traitement algébrique

Ce problème permet de travailler la notion de fonction à **paramètres**.

Difficultés pour les élèves:

- Isoler le paramètre *o* des autres paramètres à partir de la formule relation de Thalès

Les difficultés de traitement algébrique

Ce problème permet de travailler la notion de fonction à **paramètres**.

Difficultés pour les élèves:

- Isoler le paramètre o des autres paramètres à partir de la formule relation de Thalès
- Transformer la formule générale en trois fonctions: o(d), o(l) et o(m), avec l'un des paramètres comme variable indépendante et les deux autres paramètres fixés. Les élèves ont eu besoin d'un exemple pour comprendre le procédé.

Des erreurs de calcul …

$$m\cdot(d+o) = o\cdot L$$
$$md + mo = o\cdot L$$
$$\frac{m\cdot\{md\}}{L} = (-o^2)^2\cdot L$$

$$m\,(d+o) = o\cdot l$$
$$\cancel{m}d + \cancel{m}o = ol$$
$$m\,d + m.o = ol$$
$$m.d + m = o^2.\,l$$
$$2md = o^2.\,l$$

$$\sqrt{o^2} = \frac{m^2\cdot md}{L}$$
$$\sqrt{o^2} = \frac{m\cdot m\cdot d}{L}$$
$$o^2 = \frac{m^2\cdot d}{L}$$

Isoler le paramètre o (5GT/4h)

Comment isoler o ?

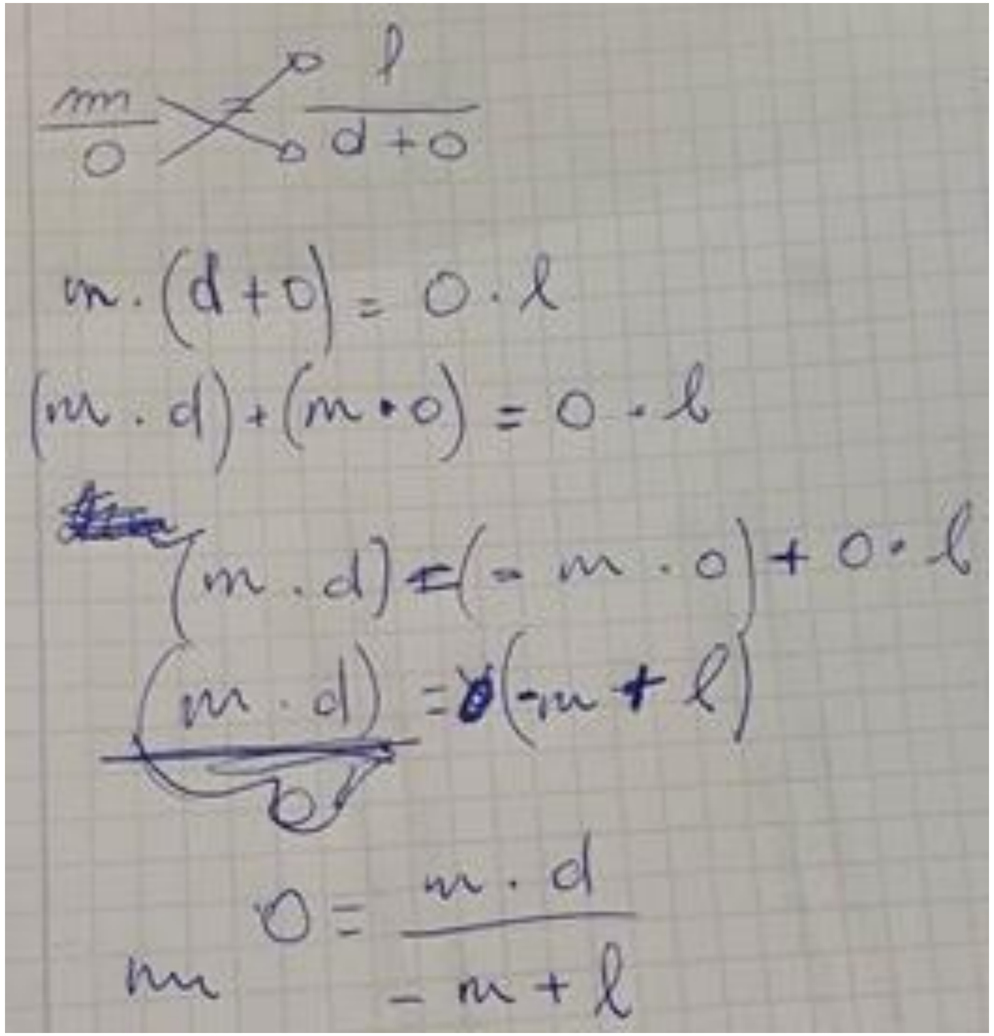
$$m(d+o) = o \cdot L$$

$$= \frac{md + mo}{L} = o \cdot L$$

$$= \frac{md + mo}{L} = o$$

$$o = \frac{md + mo}{L}$$

Un essai concluant…



Isoler le paramètre o (5GT/4h)

Les atouts de l’activité

- Problème ouvert: vise à développer la recherche chez les élèves, ainsi que leurs capacités d'ordre méthodologiques
  - l’énoncé permet l’entrée de tous les élèves dans l’activité. Ce problème est dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ils s’approprient facilement la situation, s’engagent facilement dans les essais, conjectures, projets de résolution et contre-exemples ;
  - l’énoncé est court, n’induit ni la méthode ni la solution ;
  - la solution ne se réduit pas à l’utilisation ou l’application immédiate des résultats présentés en cours ;
  - plusieurs stratégies de résolution sont possibles ;
  - ce problème permet de proposer une activité comparable à celle du mathématicien confronté à des problèmes qu’il n’a pas appris à résoudre.
- Permet la plausibilité des résultats: les comportements asymptotiques sont visibles lors des manipulations, les modèles peuvent être confirmés par les manipulations, les conjectures sont vérifiées aussi par les élèves.
- Il peut s’agir d’une activité de réactivation de notions vues en 3e (Théorème de Thalès) et 4e (Géométrie dans l'espace) mais aussi d’un problème d’intégration des domaines de la géométrie, de l’analyse et de l’algèbre.

Les atouts de l'activité

- Permet d'introduire les notions de limite et asymptote.
- Permet de découvrir les types de fonctions, et plus particulièrement les fonctions homographiques.
- Beaucoup de variantes possibles (si les élèves ont vu ou non les limites et asymptotes par exemple).
- Contact avec la notion de paramètre, essentielle en algèbre, et l'un des "noeuds" de l'apprentissage dans le secondaire supérieur.
- Permet l'étude des fonctions par familles, en s'intéressant au rôle des différents paramètres.
- Permet l'étude des fonctions dans un contexte qui donne du sens, travail possible sur plusieurs points du programme (limites, asymptotes, types de fonctions, manipulations de graphiques, …).
- Situation qui donne du sens à la proportionnalité.
- Apprentissage de la modélisation.
- Emergence de questions typiques: imprécision des données, choix des variables, difficultés de mesure, domaine de validité du modèle, sens de l'ombre "infinie" ou "inexistante", …
- S'imaginer l'au-delà.

Merci
pour votre
participation !

Et bienvenue au GEM pour poursuivre le travail !

Groupe d’enseignement mathématique
https://wp.gem-math.be/

Participation reconnue comme formation IFEC (ex-Cecafoc/FoCEf) en 2023-2024