# Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation fonctionnelle

Mariza Krysinska (Ladimath, Collège St Michel, GEM)
Maggy Schneider (Université de Liège, Ladimath, Collège St Michel)

Congrès SBPM 2023 :
« Grandir avec les maths »

Collège St Michel, Bruxelles
22-24 août 2023

# Introduction

# Plan de l’exposé et références principales

- Des écueils liés à l’apprentissage et l’enseignement de l’algèbre.
- Quelle fonctionnalité pour l’algèbre ? La piste de la modélisation fonctionnelle.
- Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle.
- Quelques jalons d’un tel enseignement de la $1^{\text{ère}}$ à la $6^{\text{ème}}$ secondaire: les principes.
- Quelques jalons d’un tel enseignement de la $1^{\text{ère}}$ à la $6^{\text{ème}}$ secondaire: Des suites de nombres figurés aux modèles fonctionnels paramétrés.
- Quelques jalons d’un tel enseignement de la $1^{\text{ère}}$ à la $6^{\text{ème}}$ secondaire: Etude des fonctions du second degré.

# Plan de l'exposé et références principales

Job, P., Krysinska, M., & Schneider, M. (2023). Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation, du secondaire au supérieur. *Repères IREM*.

Krysinska, M., & Schneider, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels*. Les Editions de l'Université de Liège.

Henrotay P., Krysinska, M.,Rosseel H. & Schneider, M. (2015). *Des fonctions taillées sur mesure*. Les Editions de l'Université de Liège.

Schneider, M., Job, P., Matheron, Y., & Mercier, A. (2015). Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres : des complexes aux relatifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 9-46.

Schneider, M. (2006). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie*, *154*, 85-96.

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

Ce choix de la modélisation fonctionnelle est supposé éviter les principaux écueils d'apprentissage mais aussi des dérives de l'enseignement  comme des énoncés d'exercices supposant des « connaissances de contrat » :

*Précise si le résultat du calcul suivant est un périmètre, une aire, un volume ou aucun des trois :*
*3a + 5a*

*Simplifie en utilisant toutes les règles algébriques vues :*
*(5 - 2a) 3d (2 - b)*

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

Un autre écueil est lié à un enseignement trop polarisé sur les erreurs au détriment d'une référence au statut des expressions algébriques.

$$\begin{aligned}
\frac{3a+6}{3} &= a+2 \\
\frac{3a+6}{3} &= a+6 \\
\frac{3a+6}{3} &= 3a+2
\end{aligned}$$

*Que vous inspirent ces trois lignes* ? demande-t-on à des enseignants en formation. Effectivement, ceux-ci se polarisent majoritairement sur une lecture de ces égalités en termes d'erreurs de calcul formel plutôt qu'en termes de statuts différents des égalités: identité, équation avec ou sans solution.

# Des écueils liés à l’apprentissage et l’enseignement de l’algèbre

Le passage du cycle inférieur au cycle supérieur soulève une difficulté spécifique : d’un cycle à l’autre, il ne s’agit plus de respecter une règle ou une consigne mais d’ assumer un certain degré d’ incertitude et des prises de décision.

Ainsi, suivant les circonstances, il faudra choisir parmi ces expressions équivalentes :

$2x^2 - 3x + 1$

$2\ (x - 1)\ (x - 1/2)$

$x^2\ (2 - 3/x + 1/x^2)$

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

Ce changement de contrat est une cause majeure d'échec : *« A l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser) »* (Chevallard, 1989)

Cette absence de fonctionnalité de l'algèbre conduit à :

# Des écueils liés à l’apprentissage et l’enseignement de l’algèbre

- La pseudo-algorithmicité :

  *« D’une manière générale, l’enseignement usuel tend à diminuer l’incertitude inhérente à l’activité mathématique en fournissant à l’élève un code de conduite, nulle part explicité comme tel, mais extrêmement prégnant, qui engendre un quasi déterminisme des pratiques mathématiques scolaires, ce que nous nommerons la pseudo-algorithmicité »* (Chevallard, 1989)

  On a un carré $(1 + \cos 2x)^2$, DONC on le développe

  On a 2 en facteur commun dans $2 + 2\cos 2x$, DONC on factorise : $2 + 2\cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$.

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

- Un malaise à propos de la validation des règles algébriques : règles de « conformité », théorèmes « élèves », théorèmes « professeurs » (Mercier, Colloque IREM Montpellier).
- Une ignorance de la dénotation :
  - ✓ *Une expression comme* $y\,(2x + y)$ *a une valeur numérique qui dépend des valeurs de* $x$ *et de* $y$ *et qui n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques* (Sackur et al.)
  - ✓ Expressions analytiques des fonctions vues comme « étiquettes » et non comme contraintes (Schneider, 1988)

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

- Dans plusieurs recherches anglo-saxonnes, on s'ingénie à trouver une cohérence, en faisant des classifications, au cas par cas, des erreurs algébriques habituelles alors qu'on peut les interpréter en termes de contrat didactique.
- Par exemple, un élève qui écrit l'égalité suivante :

$$2a + 5a + 3\,b = 10\,ab$$

peut tout simplement vouloir respecter des attentes qu'il suppose dans le chef de l'enseignant : une réponse compacte comme en arithmétique (sans signe d'opération, du moins explicite) et un respect de la « complexité ostensive » de l'expression initiale, en l'occurrence garder trace de tous les coefficients numériques, des lettres et des opérations d'addition du premier membre de l'égalité.

# Des écueils liés à l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre

Par conséquent, faire des catégories d'erreurs relevant du « non sens » a-t-il un intérêt ?

L'important n'est pas tant de faire des classifications d'erreurs mais plutôt de constater qu'après 2 ans d'enseignement secondaire, les élèves (belges) ne savent pas ce que signifie : vérifier que 2 est solution de l'équation $3x - 6 = 0$ (Vlassis et Demonty, 2012).

Ce qui nous ramène à l'absence de conscience, chez les élèves, de la propriété de dénotation des expressions algébriques.

# Des écueils liés à l’apprentissage et l’enseignement de l’algèbre

Plus récemment, Radford (2015) souligne l’importance de la **dénotation** comme une des caractéristiques de la pensée algébrique, associée à deux autres caractéristiques :

- La présence d’**indéterminés** (inconnues, variables, paramètres) qui représentent des nombres non-connus
- Une propriété d’**analycité** de ces indéterminés, c’est-à-dire qu’Ils se prêtent aux mêmes opérations que les nombres connus (addition, multiplication, …)

Notre point de vue est que ces caractéristiques sont AUSSI celles de la pensée fonctionnelle, comme nous l’illustrerons plus loin.

# Quelle fonctionnalité pour l’algèbre ?
# La piste de la modélisation fonctionnelle

## Quelle fonctionnalité pour l’algèbre ?
## La piste de la modélisation fonctionnelle

Les domaines de fonctionnalité de l’algèbre sont multiples :

- La géométrie analytique
- Le calcul de grandeurs
- L’ analyse et l’ étude des fonctions en particulier
- La programmation linéaire
- L’ algèbre financière
- … ???
- Pourquoi pas la géométrie « Bipoint » (Nguyen et Schneider, 2016)?

# Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ?
# La piste de la modélisation fonctionnelle

Artigue (2015) observe, d'un pays à l'autre, trois entrées principales pour l'algèbre élémentaire qu'elle (Ib.) décrit en ces termes :

- L'entrée par les équations (inéquations, systèmes) qui sont les objets traités en priorité dans lesquelles la lettre a surtout le statut d'inconnue.
- L'entrée par les « patterns » : recherche de régularités, de modèles. La lettre est alors un « nombre généralisé » et les objets d'étude privilégiés sont des formules auxquelles conduisent, par exemple, les suites de nombres figurés dans des problèmes de dénombrement.
- L'entrée par la modélisation où l'on exprime des covariations entre grandeurs. Les lettres $x$ et $y$ ont le statut de variables et l'objet prioritaire est la fonction.

C'est sur ces deux dernières entrées que joue notre choix de modélisation fonctionnelle, sans exclure d'autres contextes de fonctionnalités de l'algèbre.

## Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ?
## La piste de la modélisation fonctionnelle

- L'idée est donc d'intégrer l'algèbre d'entrée de jeu dans une perspective de modélisation fonctionnelle. Ce qui n'exclut pas d'autres fonctionnalités.

- Elle est proche du point de vue adopté par Bosch et Gascon pour qui l'algèbre est une Organisation Mathématique au service des autres.

# Au-delà des « compétences », la modélisation fonctionnelle pour structurer un enseignement

Une première anecdote est relatée par Schneider (2006) suite à une formation d'enseignants de mathématiques au premier degré :

- Ceux-ci doivent préparer leurs élèves à gérer des suites de nombres figurés (patterns) comme on en trouve dans les évaluations PISA et avouent que, eux-mêmes, sont mal à l'aise dans la gestion de tels « problèmes » comme ils disent.
- Les formateurs leur enseignent des suites mathématiques de base dont les progressions arithmétiques et géométriques.
- Reconnaissant être plus à l'aise eux-mêmes, les enseignants refusent d'envisager de former pareillement leurs élèves car, disent-ils, *Si nous faisons la même chose avec nos élèves, ce ne sera plus pour eux de la résolution de problèmes. Or, c'est à cela que nous devons les former.*

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Car, le mot d'ordre en vigueur dans l'idéologie des compétences est bien de préparer les élèves à gérer le *caractère inédit et complexe* des problèmes pour en faire de futurs *citoyens responsables*.
- Et, dans cette perspective, les compétences associées de « Résolution de problèmes » et de « Modélisation » font partie des  compétences transversales fondamentales à évaluer … sans forcément (trop) les y préparer car, sinon, on biaise en quelque sorte le résultat de l'évaluation.

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Ce mot d'ordre demeure dans l'importance accordée aux évaluations *PISA*. *En effet,* dans les textes officiels relatifs à *PISA*, on peut lire : « *PISA* porte davantage sur la maîtrise des compétences que sur l'acquisition de savoirs et de contenus scolaires. »

- Comme nous le démontrons ci-après, ce point de vue *est **incompatible avec l'épistémologie mathématique, tout particulièrement en ce qui concerne la modélisation et la résolution de problèmes.***

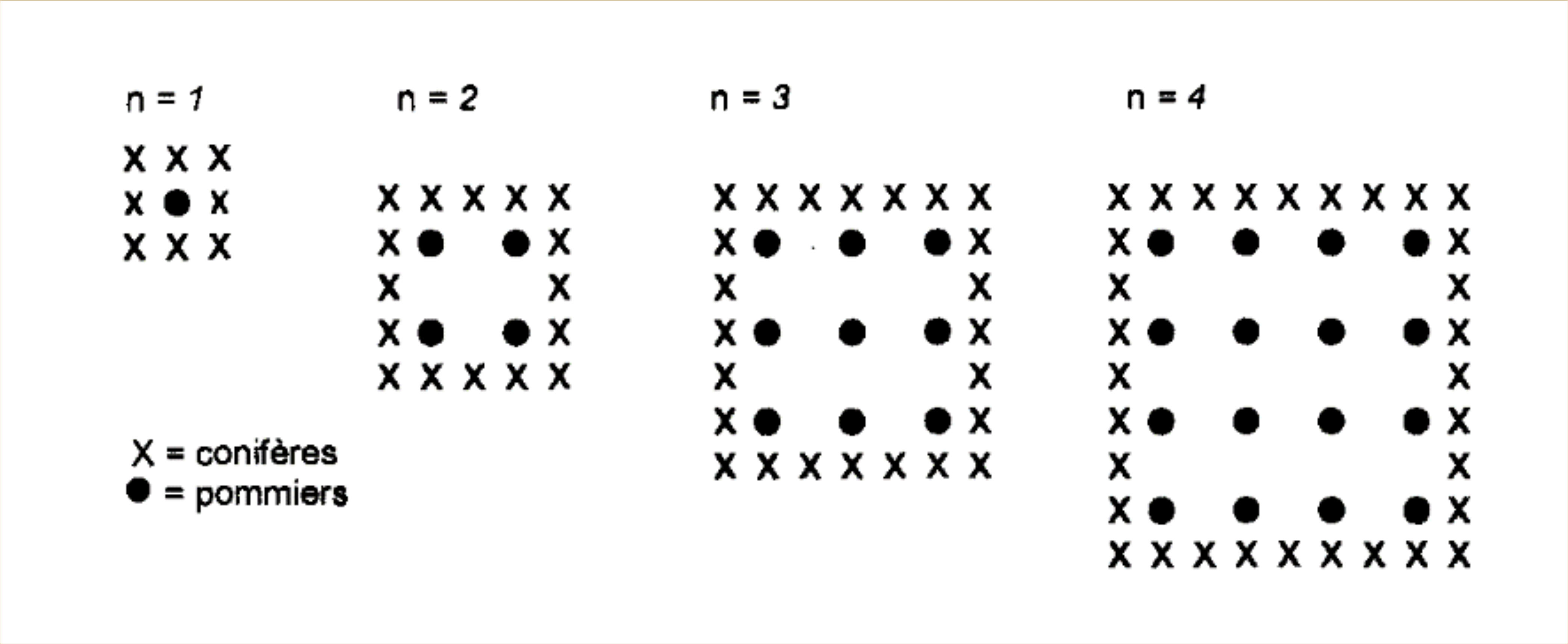
# Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Analysons tout d'abord l'item des pommiers (tiré de *PISA* 2000) pour mettre en lumière en quoi les compétences transversales associées « résolution de problème » et « modélisation » sont problématiques et, parallèlement, en quoi l'arrière-plan dans lequel s'insère *PISA* est lui aussi problématique.
- Voici l'énoncé de l'item, adapté par souci de concision.

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

« Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre ($n$) de rangées de pommiers. »

# Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle



## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

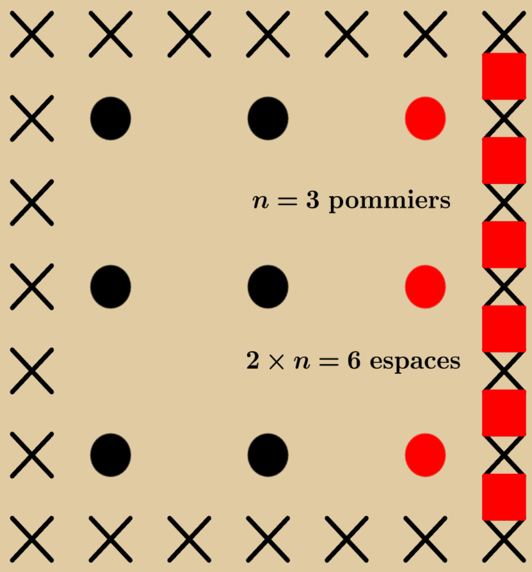
- Les élèves doivent déterminer le nombre de pommiers et de conifères à l'étape $n$. Comment peuvent-ils procéder ?
- Concentrons-nous sur la formule des conifères à propos de laquelle nous décrirons deux types possibles de résolutions contrastées, tirées de Schneider et al. (2016) :
  - **Résolution 1 (« astucieuse »)**
  - **Résolution 2 (par catégorisation de problèmes)**

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- **Résolution 1 (« astucieuse »).**
- La formule des pommiers $n^2$ n'est pas problématique.
- Pour celle des conifères, une résolution « astucieuse » peut-être envisagée, comme celle décrite ci-après .

# Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- « Nombre de conifères : les choses se corsent…combien le long d'un côté ? le nombre de conifères correspond au nombre de pommiers (5), plus 2 conifères de coin, plus un dans l'espace entre chaque pommiers, donc plus 4… 11 conifères… x 4 ! Non, car les conifères de coins seraient comptés deux fois… 11 conifères fois 2 (en-haut et en-bas) plus 1,2,3,4,5,6,7,… 8, 9   fois 2… donc 22 + 18,… 40 conifères».
- Illustration pour n = 3



# Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

Plus généralement, une telle résolution se base sur :

- Une comparaison entre rangée de pommes et rangée correspondante de conifères.
- Le fait qu'il y a 4 côtés.
- Mais qu'il ne faut pas compter plusieurs fois les conifères aux coins du carré.

Cela conduit à $2 \times n$ conifères par côté et $4 \times 2 \times n = 8n$ conifères au total.

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Une autre résolution, par catégorisation de problèmes se place dans le contexte où les élèves ont reçu un enseignement de modèles fonctionnels de base (e.a. les suites arithmétiques et géométriques).
- Dans les programmes, ces suites sont abordées à partir de 15 ans en $5^{e}$. Alors que les travaux de Krysinska et Schneider (2010) ont montré des  capacités d'élèves plus jeunes dès 12 ans, notamment via l'étude des nombres figurés.

# Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Les élèves disposent de critères de reconnaissance : addition/multiplication répétée.
- Dans ce contexte du nombre de conifères, la résolution consiste à déterminer si un des modèles connus est applicable à l'item.
- Les élèves peuvent identifier l'addition répétée :

  $(8 = 8\times1,\ 16 = 8+8 = 8\times2,\ 32 = 8+8+8 = 8\times3)$,

  ce qui conduit à $8n$.
- Cet enseignement préalable (relatif à la modélisation fonctionnelle) permet de trivialiser, ou presque, la résolution de certaines classes de problèmes.

# Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Le contraste entre ces deux résolutions soulève une sorte de dilemme lié à l'évaluation : doit-on privilégier d'évaluer le talent personnel d'un élève ou, plutôt, d'évaluer sa capacité à faire usage de savoirs auxquels l'enseignement l'a formé ?
- Le choix peut alors être dicté par une :

**caractéristique épistémologique forte des savoirs mathématiques qui est *l'économie de pensée* qu'ils autorisent.**

- Les concepts et techniques mathématiques sont en effet développés pour permettre de regrouper les problèmes en classes dans le but de pouvoir les traiter avec une importante économie de pensée. C'est là que se situe le caractère le plus fondamental de l'épistémologie des mathématiques.

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

Cette économie de pensée se réalise e.a. à travers des modélisations symboliques comme l'illustrent les concepts d'analyse :

- La quadrature de la parabole, le volume du cône, celui de la pyramide et celui de la sphère sont des problèmes a priori différents mais ils peuvent être regroupés en un seul : l' intégrale d'une fonction du second degré.
- A propos de l'œuvre d' Archimède : *« […] pour qu 'on ait le droit de voir là un "calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de* ***classification des problèmes*** *suivant la nature de "l 'intégrale" sous-jacente.»* (Bourbaki)

## Au-delà des « compétences », un enseignement structuré par la modélisation fonctionnelle

- Comme le souligne J. Gascón (1993), ce sont les paramètres qui rendent possible de réunir en classes des problèmes « parents ».
- On réalise ainsi une économie de pensée en étudiant, en une fois, les caractéristiques communes aux problèmes d'une même classe. En outre, les nouvelles connaissances obtenues à partir du travail sur un modèle sont valables pour tous les domaines où le modèle fonctionnel s'applique. On résout alors d'un seul coup non pas un seul problème, mais plusieurs. C'est une raison pour remplacer l'étude des fonctions, une par une, par celle des classes de fonctions.
- Le paramétrage apporte, en plus, une marge de liberté qui permet de tenir compte des spécificités du problème traité.

# Un enseignement de la modélisation fonctionnelle de la 1ère à la 6ème secondaire : quelques principes.

Nous ferons référence ici à un enseignement se basant sur l'étude des fonctions regroupées en classes paramétrées et « Taillées sur mesure » (Henrotay et al. 2015) pour répondre à des problématiques intra ou extra-mathématiques.

- Ces problématiques sont diverses, par exemple, les fonctions exponentielles pour modéliser certains types de croissance comme celle de bactéries et les fonctions logarithmiques en lien avec certaines échelles en acoustique ou sismologie.
- On peut, de même, construire la classe des fonctions sinusoïdales en lien avec l'étude de phénomènes harmoniques non amortis, ce qui permet, en outre, de justifier le choix de la mesure « radian » par le souhait de pouvoir traiter des phénomènes périodiques aussi bien à l'échelle planétaire qu'à celle de micro-mondes comme celui des électrons qui gravitent autour d'un noyau.

# Un enseignement de la modélisation fonctionnelle de la 1ère à la 6ème secondaire : quelques principes.

- Dans ce parcours, les fonctions constituent le principal objet d'étude et le choix des équations et inéquations traitées est subordonné aux problématiques rencontrées.
- Les identités sont des outils de transformations de fonctions liées à des besoins particuliers : p.ex. factoriser pour obtenir les racines, …
- Les sophistications techniques sont liées aux problé-matiques traitées (ex des (in)équations irrationnelles requises dans certains problèmes d'optimisation).

# Un enseignement de la modélisation fonctionnelle de la 1ère à la 6ème secondaire : quelques principes.

- Dans cette étude, les fonctions de référence et leurs composées avec certaines affinités sont centrales
- On peut y accéder assez tôt dans le cursus au prix d'une justification hybride qui permet d'aller au-delà des seules constatations :
  - Des axiomes « graphiques » toutefois étayés de considérations numériques
  - Du travail relevant de la géométrie analytique :

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ &\left\{ \begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x + 3 \end{aligned} \right. \\ y' &= (x' - 3)^2 \end{aligned}$$

## Un enseignement de la modélisation fonctionnelle de la 1ère à la 6ème secondaire : quelques principes.

- Pour les élèves plus jeunes, les modèles fonctionnels les plus accessibles nous semblent être les progressions arithmétiques et géométriques…
- …facilement identifiables car on peut en faire une double lecture, itérative et fonctionnelle, validée par la définition du produit comme addition répétée et de la puissance comme multiplication répétée.
- Faisabilité d'un classement qui se peut se traduire par un paramétrage (Krysinska, 2007).
- Un enseignement des PA et des PG serait donc possible à ce stade.
- L'étude de quelques autres relations fonctionnelles permettrait alors d'élargir l'horizon futur.

# Un enseignement de la modélisation fonctionnelle de la 1ère à la 6ème secondaire : quelques principes.

Un autre principe de cet enseignement est de poser, sur ces progressions arithmétiques et géométriques, des questions qui permettent aux élèves de distinguer très tôt :

équation, identité et modèle fonctionnel y compris paramétré

- ✓ Question sur le nombre d'objets à une étape éloignée, à n'importe quelle étape
- ✓ Question sur le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets
- ✓ Exemples qui se prêtent à plusieurs « programmes de calcul » équivalents
- ✓ Question sur les similitudes et le regroupement d'exemples

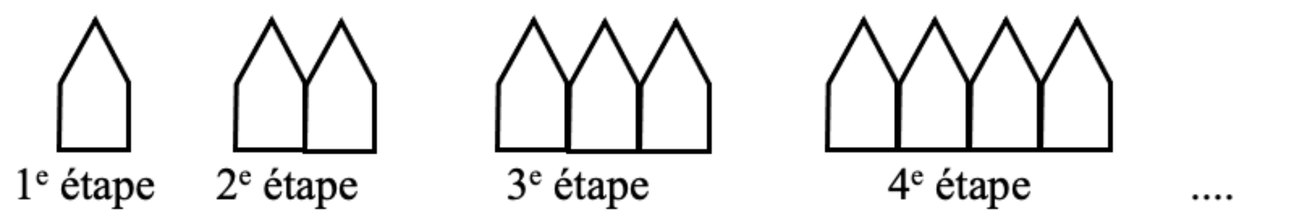
## Un enseignement de la modélisation fonctionnelle de la $1^{\text{ère}}$ à la $6^{\text{ème}}$ secondaire : quelques principes.

Et, comme illustré plus loin :

- Les problèmes de dénombrement amènent aussi la question de l' équivalence de deux programmes de calcul.
- La dénotation autorise une falsification des règles algébriques non « conformes » et le contexte du problème rend plausibles et intelligibles les autres …
- … dont certaines rendent compte de propriétés du calcul des grandeurs.

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

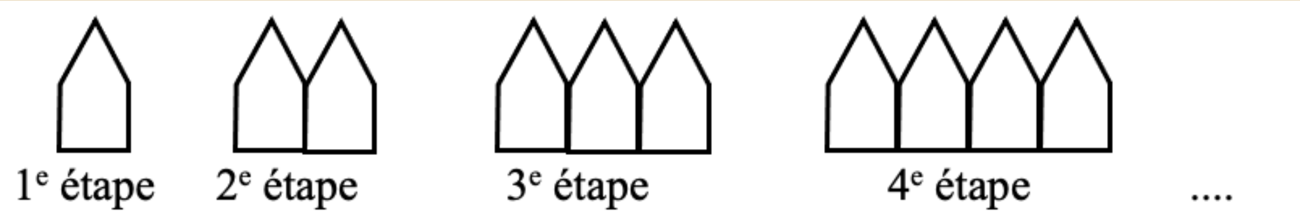
**Production des premières expressions littérales**




- *Dessinez la figure à la 5e étape*
- *Déterminez le nombre d'allumettes utilisées à n'importe quelle étape, par exemple à la 67e étape.*
- *À quelle étape utilisez-vous exactement 117 allumettes pour construire les maisons de cette suite ?*

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Production des premières expressions littérales**




- Approche itérative : on reconnaît la loi de passage d'une étape à l'autre :

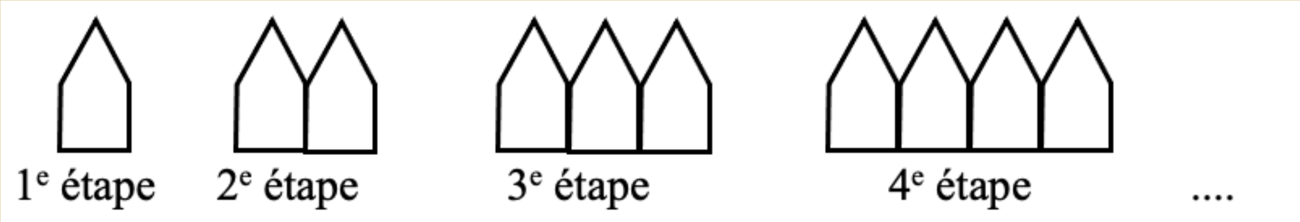
on ajoute toujours quatre allumettes.

Après un certain nombre d'étapes, le nombre d'allumettes ajoutées est un multiple de quatre. À la première étape, il y a cinq allumettes. Aux suivantes, il faut ajouter quatre allumettes autant de fois qu'il y a d'étapes moins une. Le programme de calcul associé est :

$$5 + 4 \cdot (\textit{numéro d'étape} - 1).$$

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Production des premières expressions littérales**



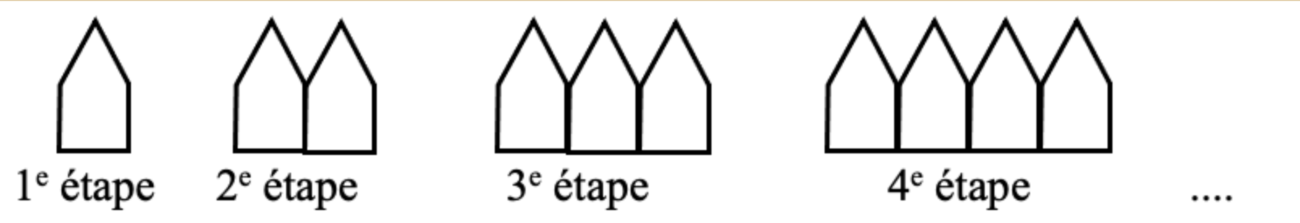

- Approche fonctionnelle : on regarde la première maison au même titre que les autres :

le comptage des maisons dicte celui des allumettes. À ceci près que toutes les maisons sont construites avec quatre allumettes sauf la première qui en comporte cinq. Le programme de calcul associé est :

$$1 + 4 \cdot \textit{numéro d'étape}.$$

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Production des premières expressions** littérales




- Une autre approche fonctionnelle : on observe que le nombre de maisons correspond au nombre d'étapes et que chaque maison utilise cinq allumettes ; on multiplie donc le nombre d'étapes par cinq.

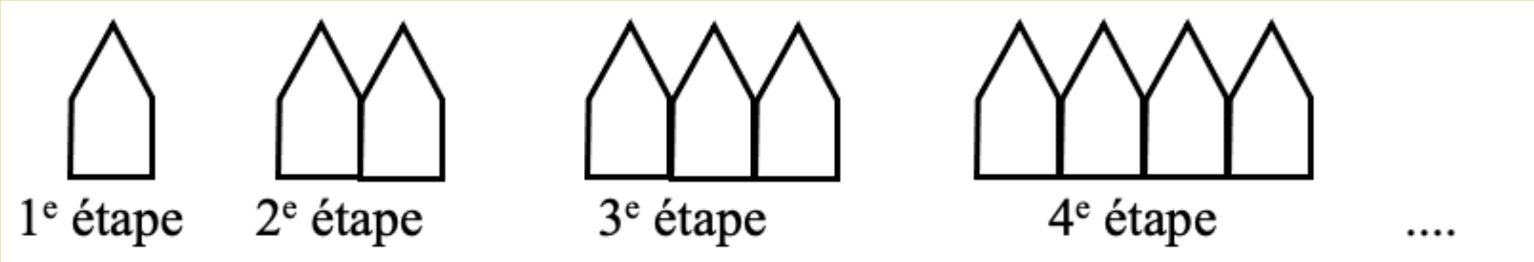
Mais comme deux maisons contiguës possèdent une allumette commune comptée ici deux fois, on doit la retirer autant de fois qu'il y a de passages d'une maison à l'autre

$$5 \cdot \textit{numéro d'étape} - (\textit{numéro d'étape} - 1).$$

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Production des premières expressions** littérales

La conformité entre les comptages des allumettes selon ces trois programmes de calcul peut être testée à l'aide de la dénotation du « *numéro d'étape* » : on remplace, dans chacun des cas, le « *numéro d'étape* » par un nombre naturel pour les quelques premières étapes de la suite concernée.




| $numéro\ d'étape$ | $5 + 4 \cdot (numéro\ d'étape - 1)$ | $1 + 4 \cdot numéro\ d'étape$ | $5 \cdot numéro\ d'étape - (numéro\ d'étape - 1)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $5 + 4 \cdot 0 = 5$ | $1 + 4 \cdot 1 = 5$ | $5 \cdot 1 - (1 - 1) = 5$ |
| 3 | $5 + 4 \cdot 1 = 9$ | $1 + 4 \cdot 2 = 9$ | $5 \cdot 2 - (2 - 1) = 9$ |
| 4 | $5 + 4 \cdot 2 = 13$ | $1 + 4 \cdot 3 = 13$ | $5 \cdot 3 - (3 - 1) = 13$ |
| 5 | $5 + 4 \cdot 3 = 17$ | $1 + 4 \cdot 4 = 17$ | $5 \cdot 4 - (4 - 1) = 17$ |

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Production des premières expressions** littérales

**La lettre « n » à la place de « *numéro d'étape*" - trois expressions équivalentes**

- $5 + 4 \cdot (numéro\ d'étape - 1)$: $\boldsymbol{5 + 4 \cdot (n - 1)}$**,**
- $1 + 4 \cdot numéro\ d'étape$**:** $\boldsymbol{1 + 4n}$**,**
- $5 \cdot numéro\ d'étape - (numéro\ d'étape - 1)$: $\boldsymbol{5n - (n - 1)}$

Pour garder l'équivalence de ces expressions sur la base de la dénotation, on doit accepter

- la règle de distribution du facteur 4 sur chacun des termes dans la parenthèse,
- la règle du changement de signe à l'ouverture de la parenthèse précédée du signe moins
- la règle du regroupement des termes semblables.

**La dénotation devient l'indice de l'usage de la lettre « n » comme variable**.

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Production des premières expressions** littérales

Trois expressions équivalentes :

- $\mathbf{5+4\cdot(\boldsymbol{n}-1)}$,
- $\mathbf{1+4\boldsymbol{n}}$,
- $\mathbf{5\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{n}-1)}$

**Pour répondre à la question**

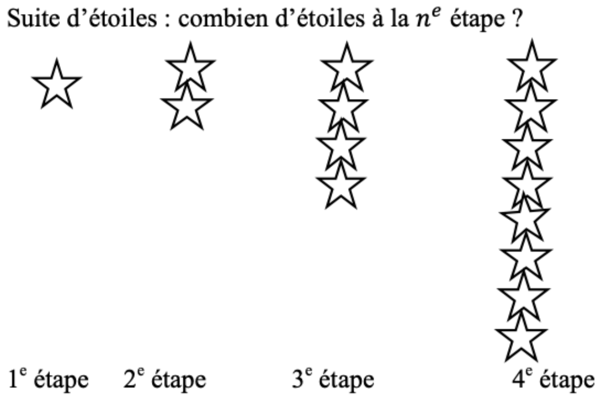
*À quelle étape, utilisez-vous exactement 117 allumettes ? »,*

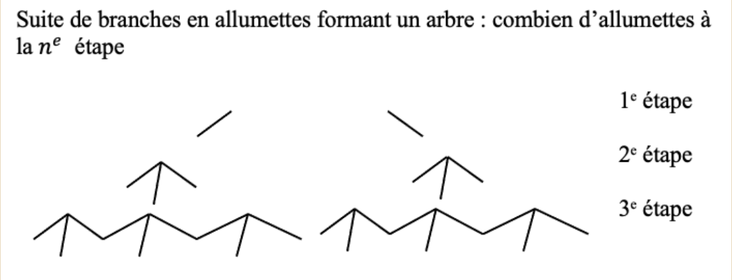
le programme de calcul $\mathbf{1+4n}$ est le plus simple pour être employé dans un calcul « à l'envers ».

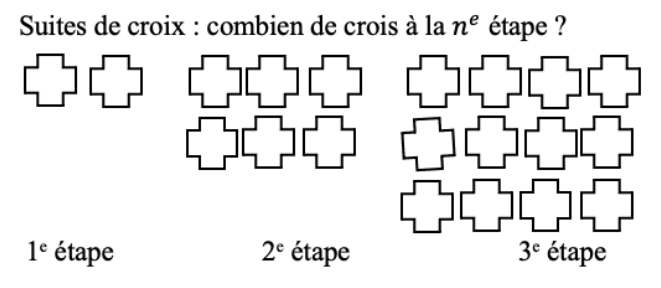
# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

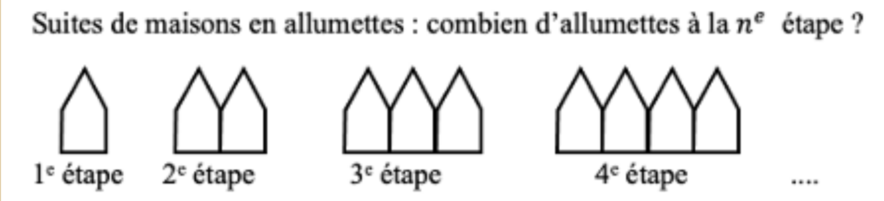
## Introuction des paramètres

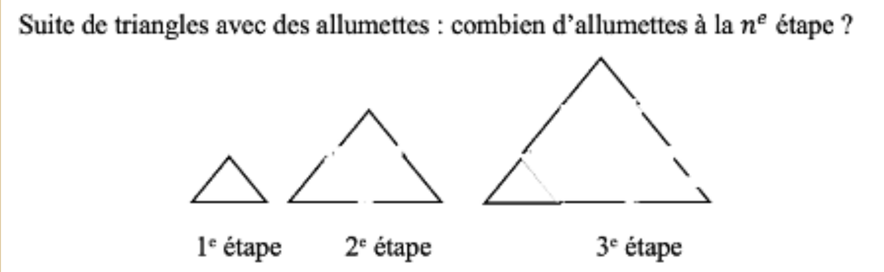
*Parmi les suites ci-dessous, lesquelles supposent des calculs semblables ?*



# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Introduction des paramètres**

- additive lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en ajoutant un même nombre d'objets : $3n$ ,$4n+1$ (suites arithmétiques) ;

Forme paramétrée : $an+b$

- multiplicative lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en multipliant les objets par un même nombre : $2^{n-1}, 2 \cdot 3^{n-1}$ (suites géométriques ) .

Forme paramétrée : $\mathrm{b} \cdot a^{n}$

L'usage de la lettre $n$ comme variable et des lettres $a$ et $b$ comme paramètres introduit une hiérarchie dans la signification des lettres.

# Des suites de nombres figurées aux modèles fonctionnels paramétrés

**Intérêt de l'enseignement précoce des suites arithmétiques et géométriques**

- Les suites géométriques peuvent être étudiées en concomitance avec l'introduction des puissances à exposant entier (positif ou négatif).

- Plus tard, en $6^e$, elles peuvent servir dans la construction des fonctions exponentielles comme correspondances entre les suites arithétiques et géométriques

# Des suites arithmétiques et géométriques aux modèles fonctionnels

## Intérêt de l’enseignement précoce des suites arithmétiques et géométriques

### Exemple de la fonction $y = 2^x$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | $-\frac{5}{2}$ | -1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{3}{2}$ | 3 | $\frac{5}{2}$ | 4 | $\frac{7}{2}$ | 5 |
| y | ¼ | | ½ | | 1 | | 2 | | 4 | | 8 | | 16 | | 32 |
| y | $2^{-2}$ | | $2^{-1}$ | | $2^0$ | | $2^1$ | | $2^2$ | | $2^3$ | | $2^4$ | | $2^5$ |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 | $\frac{9}{2}$ | 5 |
| y | ¼ | $\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}$ | ½ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | $\left(\sqrt{2}\right)^3$ | 4 | $\left(\sqrt{2}\right)^5$ | 8 | $\left(\sqrt{2}\right)^7$ | 16 | $\left(\sqrt{2}\right)^9$ | 32 |
| | | | | | | | | | | | | | | | |
| y | $2^{-2}$ | $2^{-3/2}$ | $2^0$ | $2^{-1/2}$ | $2^0$ | $2^{1/2}$ | $2^1$ | $2^{3/2}$ | $2^2$ | $2^{5/2}$ | $2^3$ | $2^{7/2}$ | $2^4$ | $2^{9/2}$ | $2^5$ |

# Etude des fonctions du second degré

- **Approche des fonctions du second degré par leur finalités**

Deux classes possibles de problèmes :

- Problèmes d’optimisation
- Problèmes se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ à une inéquation du type $f(x) > k$

L’approche des fonctions du second degré par leur finalité justifie

- l’adaptation du degré de maîtrise *des* techniques algébriques selon les besoins de ces deux classes de problèmes;
- la hiérarchie du savoir algébrique;
- L’organisation de ce savoir.

# Etude des fonctions du second degré

**Diversité des contextes où le modèle du second degré est pertinent**

**Dans le contexte cinématique.**

- *On lance un objet verticalement avec la vitesse initiale de 10* ${}^{m}/_{s}$*. On voudrait connaître la hauteur maximale de l'objet et le temps de sa chute.*

Le modèle algébrique est est $h = 10t - 4{,}9t^2$ où $t$ est la variable désignant le temps

# Etude des fonctions du second degré

- **Diversité des contextes où le modèle du second degré est pertinent**

**Dans le contexte économique.**

- *Un marchand de glaces vend 400 cornets par semaine à 1,90 € le cornet. Il a remarqué que chaque fois qu'il augmente son tarif de 20 cents, il vend 20 glaces de moins par semaine. On suppose aussi que chaque fois que le marchand de glace diminue son tarif de 20 centimes, il vend 20 glaces de plus. On voudrait connaître le nombre de cornets pour avoir un gain maximal et le nombre de cornets avec un gain nul.*

Le modèle algébrique est $P = (1{,}9 + 0{,}2n) \cdot (400 - 20n) = -4n^2 + 38n + 760$ où $n$ est la variable qui désigne le nombre de fois qu'on a augmenté ou diminué de 0,20 euros le prix initial de 1,9 euros et $P$ désigne le gain du marchand.

# Etude des fonctions du second degré

**Diversité des contextes où le modèle du second degré est pertinent**

**Dans le contexte géométrique.**

- *On considère tous les rectangles qui ont un périmètre de 12 cm. On voudrait connaître les dimensions du rectangle d'aire maximale, s'il existe, et les dimensions du rectangle qui a une aire de 20 cm*$^2$.

L'aire A d'un rectangle quelconque qui a un périmètre de 12 cm est exprimée à l'aide de la formule $A = l(20 - l) = 20l - l^2$ où $l$ désigne l'une des deux dimensions variables du rectangle.

# Classe des fonctions du second degré identifée par une formule paramétrée

- **Importance des paramètres pour la modélisation fonctionnelle**
- Trois formules dans les contextes des grandeurs
  - $h = 10t - 4{,}9t^2, \quad P = -4n^2 + 38n + 760\ , \quad A = 20l - l^2$
- Une seule formule standardisée paramétrée

$$y = ax^2 + bx + c.$$

La lettre $x$ n'est plus une mesure de grandeur variable mais une variable numérique, sans lien avec un contexte quelconque.

# Classe des fonctions du second degré identifée par une formule paramétrée

**Importance des paramètres pour la modélisation fonctionnelle**

- Pour la classification des modèles mathématiques ou extra - mathématiques qui rend possible l'unification et la réduction des types de problèmes.
- Pour obtenir des nouvelles connaissances à partir du travail sur un modèle qui sont valables pour toute la classe de problèmes que ce modèle représente ou représentera.

Par exemple, le paramétrage des formules permet de déduire des propriétés d'une classe de fonctions pour une fonction particulière ; on résout ainsi d'un seul coup non pas un seul problème, mais plusieurs.

# Etude de la classe des fonctions du second degré

En général, **l'étude d'une classe des fonctions** consiste à

- **Identifier cette classe algébriquement par une formule paramétrée** et à interpréter géométriquement chacun des paramètres y présents

  Par exemple la classe des fonctions du second degré est identifiée par la formule réduite $y = ax^2 + bx + c$ ;

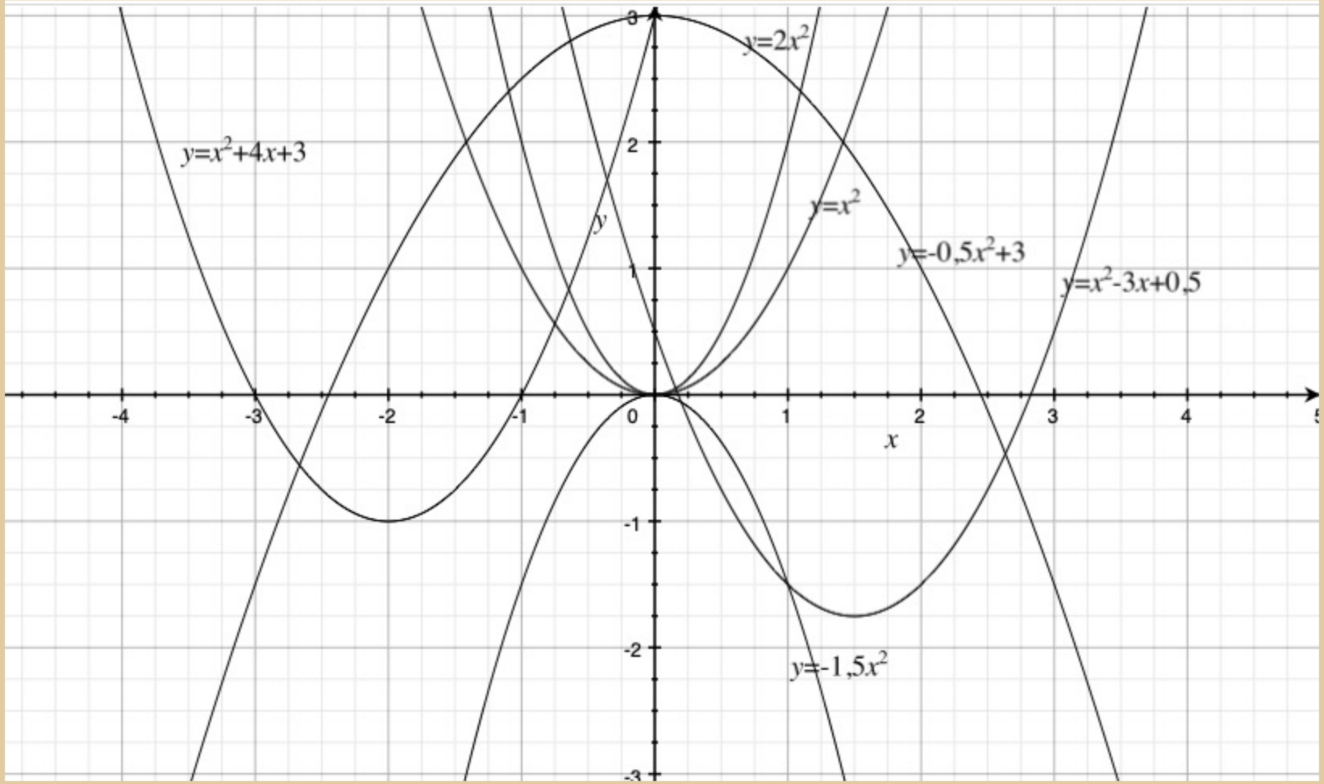
- **à établir son identité graphique**.

Par exemple, la classe des fonctions du second degré est identifiée par deux graphiques de parabole, l'un tourné vers le haut, l'autre tourné vers le bas.

Dans le cas des fonctions du second degré , cette étude fournira les techniques algébriques pour déterminer les extrema et pour résoudre les équations et les inéquations du second degré.

# Etude de la classe des fonctions du second degré

**Quelques éléments du parcours didactique associé à l'étude de la classe des fonctions du second degré**



# Etude de la classe des fonctions du second degré

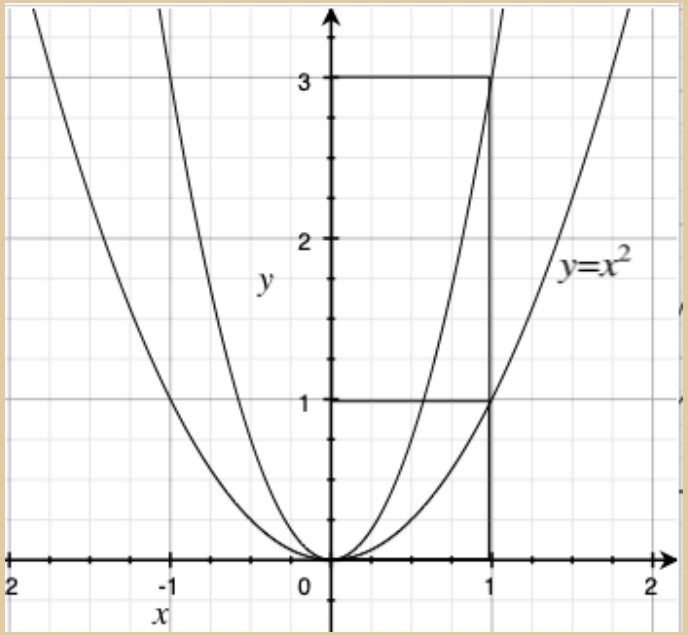
**Quelques éléments du parcours didactique associé à l'étude de la classe des fonctions du second degré**

- On interprète géométriquement le rôle du paramètre $c$ .
- On associe le paramètre $a$ à la compression parallèle à l'axe des ordonnées.
- On met en place une technique pour associer la formule $y = (x - \beta)^2$ à la translation parallèle à l'axe des abscisses de $\beta$ unités, appliquée à la courbe d'équation $y = x^2$.
- On traduit par l'équation canonique $y = a(x + \beta)^2 + \gamma$ les effets de la composée de la dilatation verticale et de la translation horizontale sur l'équation $y = x^2$ en clarifiant ainsi le rôle du paramètre $b$ dans l'équation équivalente réduite $y = ax^2 + bx + c$.

# Etude de la classe des fonctions du second degré

**Effets de la dilatation parallèle à l'axe des ordonnées sur l'équation $y = x^2$**

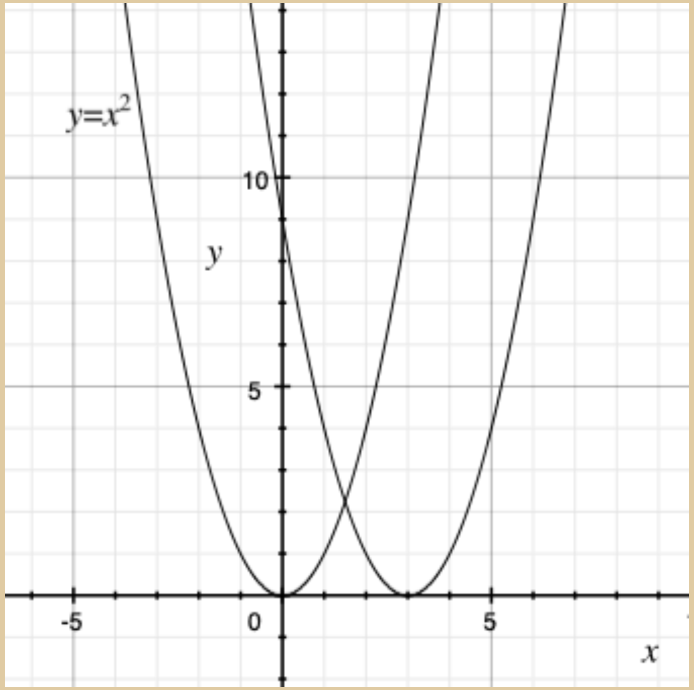
*Considérez la transformation du plan qui transforme le carré porté par les axes en un rectangle de même base et de hauteur 3 fois plus grande. Que devient* la courbe d'équation $y = x^2$ *après une telle transformation et quelle sera son équation* ?



# Etude de la classe des fonctions du second degré

- **Effets de la translation parallèle à l'axe des abscisses sur l'équation $y = x^2$**

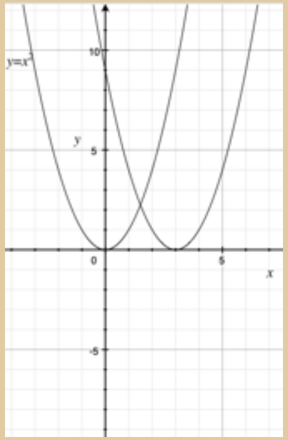
*On translate de trois unités vers la droite la parabole donnée par l'équation $y = x^2$. Quelle est l'équation de la courbe translatée ?*

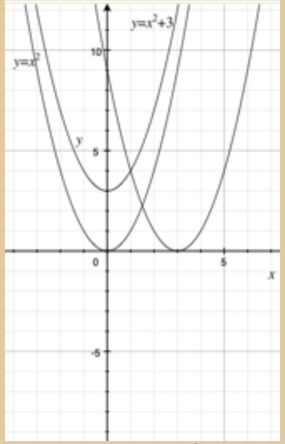


# Etude de la classe des fonctions du second degré

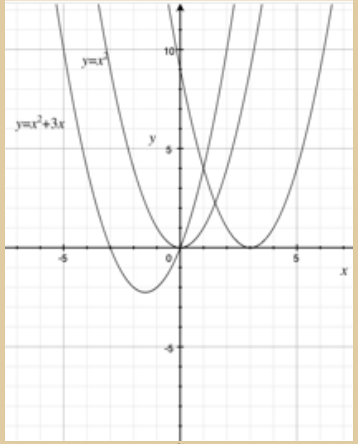
**Effets de la translation parallèle à l'axe des abscisses sur l'équation $y = x^2$**

Technique par ajustement

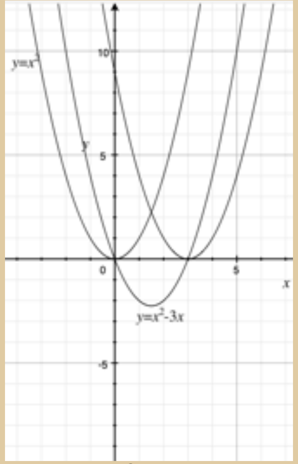


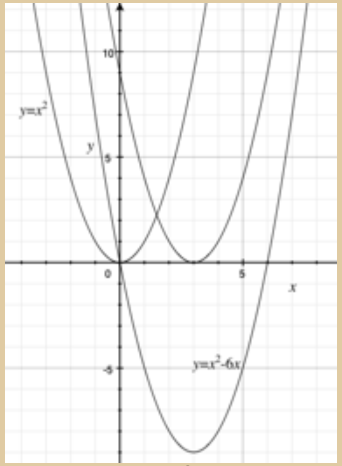

$y = x^2 + 3$



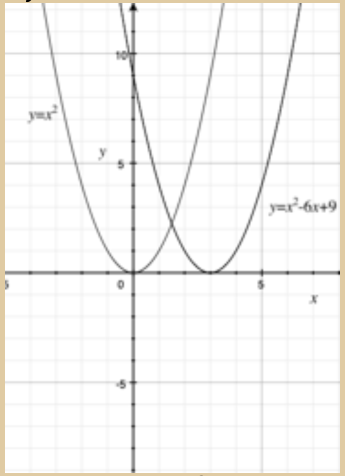

$y = x^2 + 3x$




- $y = x^2 - 3x$




$y = x^2 - 6x$




$y = x^2 - 6x + 9$

# Etude de la classe des fonctions du second degré

**Effets de la translation parallèle à l'axe des abscisses sur l'équation $y = x^2$**

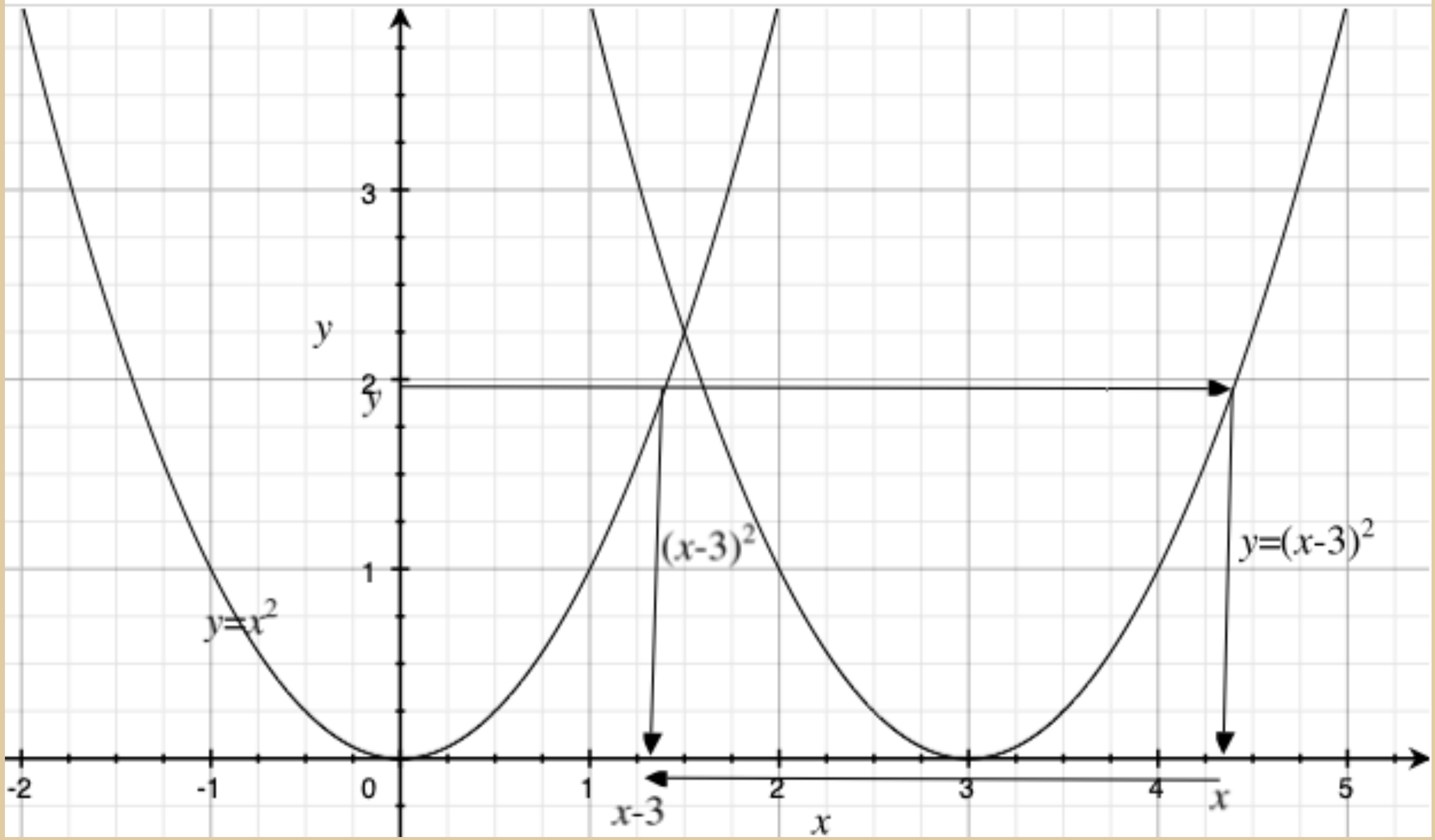
Technique numérique

| courbe de référence | | courbe translatée | |
|---|---|---|---|
| abscisses | ordonnées | Abscisses *x* | Ordonnées *y* |
| 0 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | 1 | 4 | 1 |
| -1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 5 | 4 |
| -2 | 4 | 1 | 4 |
| 3 | 9 | 6 | 9 |
| -3 | 9 | 0 | 9 |
| | | | $y = (x-3)^2$ |

# Etude de la classe des fonctions du second degré

**Effets de la translation parallèle à l'axe des abscisses sur l'équation $y = x^2$**

Technique graphique-géométrique



# Etude de la classe des fonctions du second degré

**Effets de la translation parallèle à l'axe des abscisses sur l'équation $y = x^2$**

Technique par changement de variable

- $(x, y)$ sont les coordonnées d'un point quelconque de la parabole donnée par l'équation $y = x^2$ et $(x', y')$ sont les coordonnées d'un point quelconque de la parabole translatée.

$$y' = y \text{ et } x' = x + 3$$

d'où

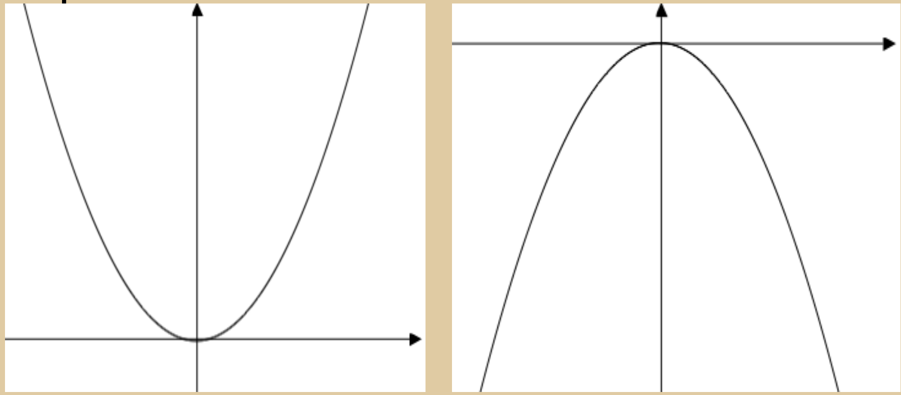
$$x = x' - 3.$$

L'équation devient $y' = (x' - 3)^2$, ou, ce qui revient au même, $y = (x - 3)^2$

# Etude de la classe des fonctions du second degré

**Réajustement du discours théorique au parcours didactique**

- On part des transformations géométriques de la parabole d’équation $y = x^2$ pour en déduire leurs effets sur cette équation et obtenir l’équation
$$y = a(x+\beta)^2 + \gamma$$
- et revenir *in fine* à l’interprétation géométrique des paramètres dans l’équation équivalente
$$y = ax^2 + by + c\ .$$
- On y insère le traitement des équations du second degré puisque l’équation réduite et complète $ax^2 + bx + c = 0$, pour la solution de laquelle on manque de technique, peut être remplacée par l’équation équivalente canonique $a(x+\beta)^2 + \gamma = 0$ qui peut être résolue par les techniques algébriques élémentaires.
- Le passage de la forme réduite $ax^2 + by + c$ à la forme canonique $y = a(x+\beta)^2 + \gamma$ et *vice versa* peut se faire par la technique d’ajustement des paramètres qui peut remplacer la technique plus difficile de la complétion au carré parfait.
- On établit l’identité graphique de la classe:



# Etude de la classe des fonctions du second degré

### Une étude raisonnée des extrema

Dans la plupart des problèmes d'optimisation, on s'intéresse essentiellement à la valeur de la variable indépendante qui réalise l'extremum.

- Dans le cas de la formule $y = a(x+\beta)^2 + \gamma$, l'extremum est atteint pour $x = -\beta$ ;
- Dans le cas de la formule $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, l'extremum est atteint pour
  $$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
- Dans le cas de la formule $y = ax^2 + bx + c$, l'extremum est atteint pour la même valeur de $x$ que l'extremum de $y = ax^2 + bx$ qui peut être rapporté au cas particulier précédent $y = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$.

# Etude de la classe des fonctions du second degré

## Une étude raisonnée des équations du second degré

Il n'y a que l'équation réduite et sous sa forme complète qui exige l'utilisation des formules générales de solutions.

Dans tous les autres cas, on peut utiliser l'une des deux techniques de résolution des équations :

- $ax^2 + c = 0$ :le calcul à l'envers lorsqu'il est possible
- $ax^2 + bx = 0$ ou $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, les conditions du produit nul

# Etude de la classe des fonctions du second degré

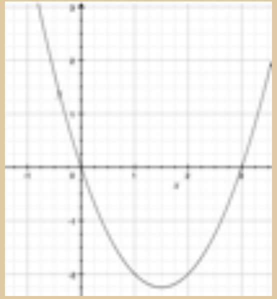
## Une étude raisonnée des fonctions du second degré

- On déterminera le sens de la concavité, le maximum ou le minimum, l’existence ou non des racines.
- On les identifiera par l’une des trois formes algébriques :
  - $y = ax^2 + bx + c,$
  - $y = a(x + \beta)^2 + \gamma$
- et, sous certaines conditions,
  - $y = a(x - x_1)(x - x_2).$

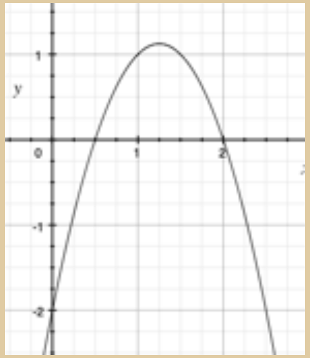
# Etude de la classe des fonctions du second degré

## Une étude raisonnée des fonctions du second degré

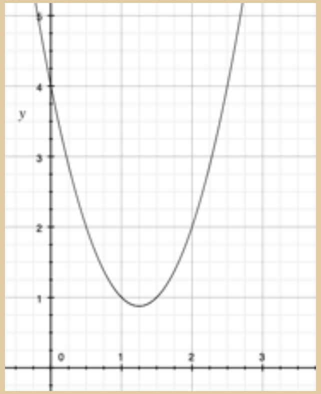
Chacune de ces formes est porteuse d'informations différentes à utiliser lorsqu'on doit associer une formule à un graphique donné.



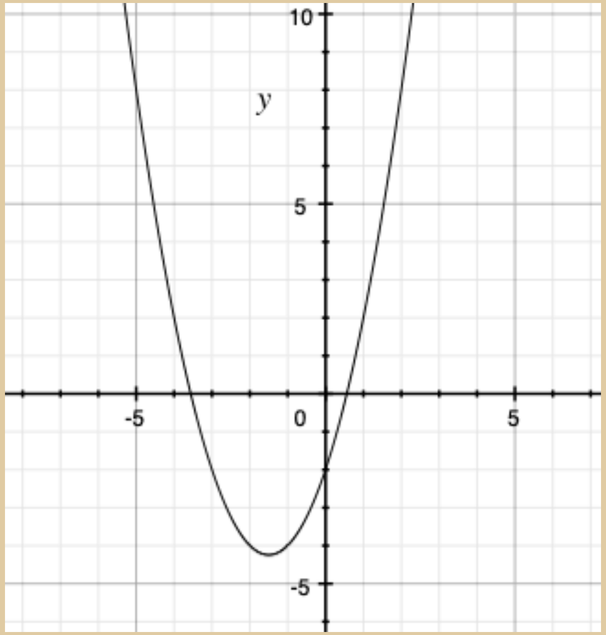
$y = ax^2 + bx$



$y = a(x - x_1)(x - x_2)$



$y = (x + \beta)^2 + \gamma$




$y = ax^2 + bx + c$

# Etude des fonctions par classes

D'une manière générale, une étude raisonnée d'une fonction réelle consiste à adapter les outils de cette étude à la classe à laquelle elle appartient.

- Fonction sinusoïdale identifiée par une formule

$$y = a\sin(\beta x + \gamma) + c$$

on s'intéressera à la période et à l'amplitude ;

- Fonction homographique identifiée par une formule de la classe

$$y = \frac{ax+b}{x+d} \text{ ou } y = a + \frac{k}{x+d} :$$

on déterminera les deux asymptotes, l'une verticale et l'autre horizontale, et la position de la courbe par rapport aux asymptotes ;

- Fonction du troisième degré identifiée par une formule de la classe

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

on s'intéressera à l'existence et au nombre des extrema ...

# En guise de conclusion

La densité de cet exposé est le reflet de la nécessité de concevoir des cursus scolaires dans une perspective globale et non atomisée

Pour approfondir le panorama évoqué ici, nous vous renvoyons aux publications du Ladimath

En vous remerciant de votre écoute et, d'avance,
de vos questions.