Je veux le plus grand
Formes optimales et mathématiques

48e congrès de la SBPMef, Collège Saint-Michel, Etterbeek, 22 aout 2023

Jean Van Schaftingen

UCLouvain

Il était une fois…

Je veux le plus grand

Formes optimales et mathématiques

Principe de symétrie de Curie

Les arbres de Steiner

Problème isopérimétrique

Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn

Symétrie et résistance minimale

Principe de symétrie de Curie

www.nobelprize.org

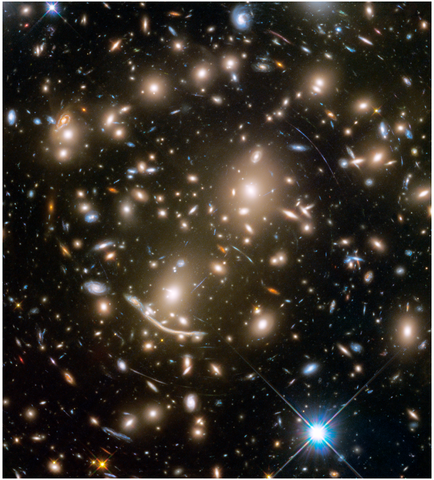
Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Pierre Curie (1859–1906), 1893

Curie s’est-il trompé ?

EC2 Modélisation

Corrie White / Solent



NASA, ESA, and J. Lotz and the HFF Team (STScI)

Brisure de symétrie pour une équation

Problème

Résoudre l'équation

$$x^2 - 1 = 0.$$

Le problème est symétrique sous la réflexion $x \mapsto -x$.

Les solutions 1 et -1 **ne sont pas symétriques** sous cette réflexion.

L'**ensemble des solutions** est symétrique.

Principe de symétrie de Curie

Jusqu'où est-il vrai ?

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Contexte original : calcul de solutions des équation de Maxwell en électromagnétisme

En général on n'attend pas que le **comportement** de l'univers respecte toute les symétries des **lois** de l'univers.

Je veux le plus grand

Formes optimales et mathématiques

Principe de symétrie de Curie

Les arbres de Steiner

Problème isopérimétrique

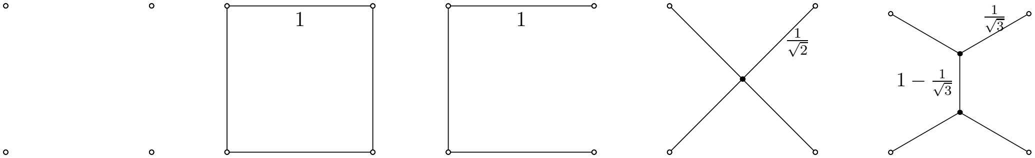
Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn

Symétrie et résistance minimale

L’arbre de Steiner d’un carré

Problème

Trouver le réseau de plus petite longueur totale contenant les quatre sommets d’un carré.



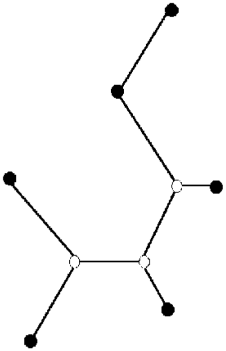
$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \simeq 2,83 > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} \simeq 2,73$$

La solution optimale **n’est pas symétrique** ; le principe de Curie n’est vérifié que pour **l’ensemble des solutions**.

La solution à d'autres symétries

Problème de Steiner

Trouver le réseau de plus petite longueur totale contenant N points donnés du plan.



- en chaque point donné dans le problème, les arrêtes font un angle d'au moins 120°,
- il y a au plus $N-2$ points intermédiaires (points de Steiner),
- en chaque point intermédiaire, trois segments se joignent en formant des angles de 120° (points de Fermat).

Le problème est **NP-complet** : tout algorithme permettant de résoudre le problème en temps polynomial résoudrait d'autres problèmes difficiles en temps polynomial (voyageur de commerce, sac à dos, coloration de graphe...).

Arbres de Steiner sur les cartes

(c) Michelin

Le modèle néglige

- la dynamique de construction du réseau,
- la capacité nécessitée pour le traffic,
- le cout lié à la topographie,
- le cout des points intermédiaires.

Je veux le plus grand

Formes optimales et mathématiques

Principe de symétrie de Curie

Les arbres de Steiner

Problème isopérimétrique

Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn

Symétrie et résistance minimale

Problème isopérimétrique classique

Problème de Didon

Parmi toutes les figures géométrique de périmètre donné, laquelle a l'aire la plus grande ?

Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Didon achète sa terre pour la fondation de Carthage

Problème isopérimétrique pour les polygones

Théorème isopérimétrique pour les polygones

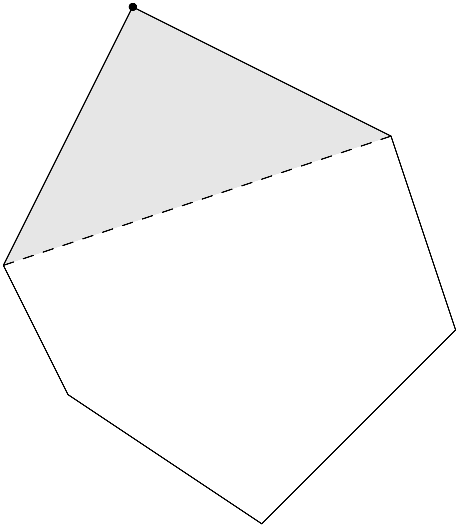
À périmètre et nombre de côtés donnés, le polygone régulier a la plus grande aire.

Reformulation

À aire et nombre de côtés donnés, le polygone régulier a le plus petit périmètre.

Problème isopérimétrique pour des polygones

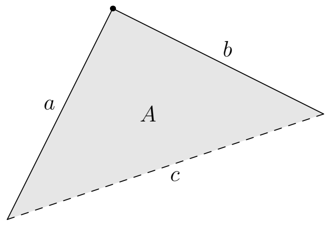
1re étape : Les côtés ont la même longueur



Problème isopérimétrique pour des polygones

1re étape : Les côtés ont la même longueur

Formule de Héron d'Alexandrie



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Inégalités entre les moyennes arithmétique et géométrique

Si $x, y \geq 0$, alors

$$0 \leq \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{xy} + y,$$

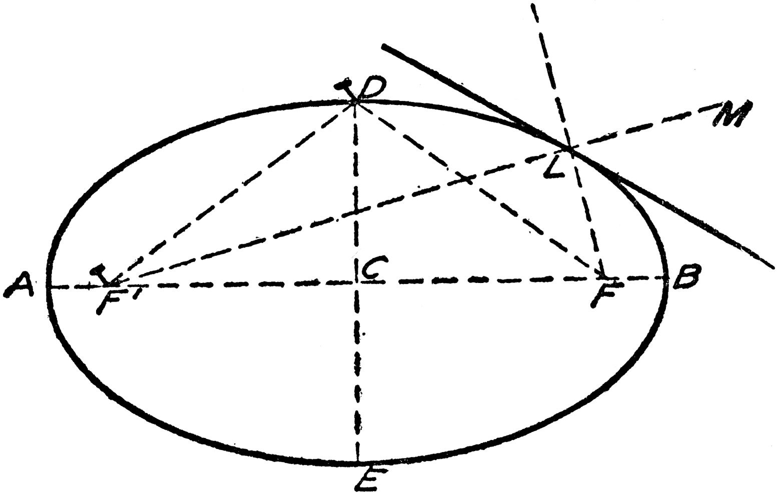
et donc on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$$\sqrt{(s-a)(s-b)} \leq \frac{s-a+s-b}{2} = s - \frac{a+b}{2} = \sqrt{\left(s - \frac{a+b}{2}\right)^2}$$

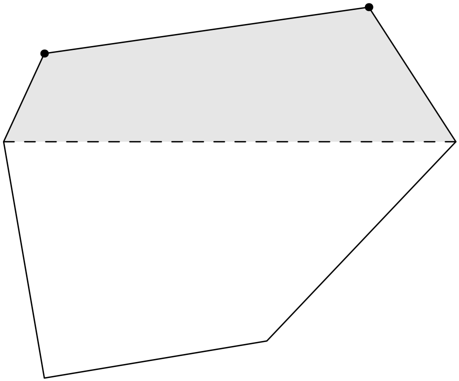
Problème isopérimétrique pour des polygones

1re étape : Les côtés ont la même longueur (alternative)



Problème isopérimétrique pour des polygones

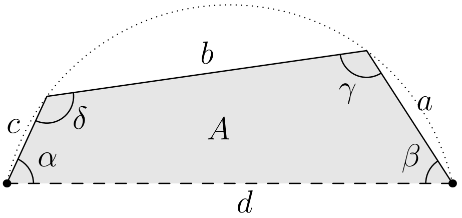
2^e étape : Les angles sont égaux



Problème isopérimétrique pour des polygones

2e étape : Les angles sont égaux

Formule d'aire de Brahmagupta–Bretschneider



$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2}$$

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

- $\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2 = 1$ si et seulement si $\alpha + \gamma = \pi$
- Le quadrilatère est alors inscrit à un cercle
- Si $a = c$, alors $\beta = \alpha$ et $\gamma = \delta$.

Problème isopérimétrique pour des polygones

3e étape : Existence

On sait que le seul polygone optimal possible est le polygone régulier.

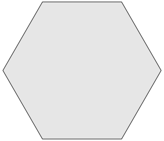
Le piège à éviter

- On cherche le plus grand naturel $n \in \mathbb{N}$.
- Si $n > 0$, alors $2n > n$ et n n'est pas le plus grand.
- Donc $n = 0$ est le plus grand naturel.

Théorème

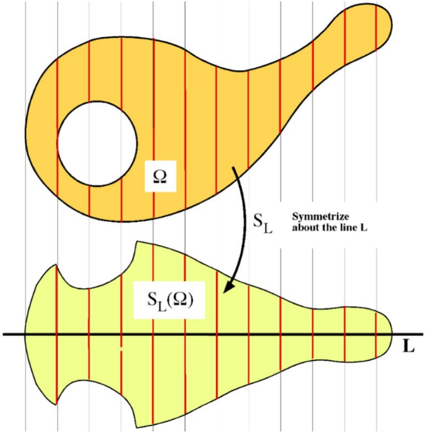
Le problème isopérimétrique à nombre de côté fixés a une solution.

Démonstration On utilise le théorème des bornes atteinte pour les fonctions continues de plusieurs variables.



Symétrisation de Steiner

Un outil pour améliorer des figures pour le problème isopérimétrique



Dessin : Andrejs Treibergs, University of Utah

Hanns Peter Holl, Jeremias Gotthelf, Zürich/München 1988, S. 33

Jakob Steiner (1796–1863)

- préserve l'aire,
- diminue le périmètre.

En prenant des symétrisations de Steiner successives par rapport à des multiples d'un angle multiple irrationnel de 2π radians, on construit une suite d'ensembles dont :

- l'aire est constante,
- le périmètre décroit vers le périmètre d'une boule.

Problème isopérimétrique et symétrie

- Le problème est invariant sous les isométries du plan (translations, rotations, symétries orthogonales et symétries glissées).
- La solution n'est pas unique.
- La solution n'est pas invariante sous translations.

La solution n'hérite que d'**une partie des symétries** du problème.

Je veux le plus grand

Formes optimales et mathématiques

Principe de symétrie de Curie

Les arbres de Steiner

Problème isopérimétrique

Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn

Symétrie et résistance minimale

Valeur propre fondamentale de Dirichlet

Firwin

La valeur propre fondamentale $\lambda_0(A)$ de Dirichlet de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est le plus petit nombre $\lambda > 0$ tel qu'il existe une fonction $u : A \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } A, \\ u = 0 & \text{sur } \partial A. \end{cases}$$

Interprétations physiques :

- $2\pi c\sqrt{\lambda_0(A)}$ est la **fréquence fondamentale** d'une membrane fixé au bord et avec une vitesse de propagation des ondes c,
- $1/(\kappa\lambda_0(A))$ est le temps caractéristique d'**équilibre thermique** avec une conductivité thermique κ.

Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn

Le disque a la plus petite valeur propre fondamentale

Théorème

Si A et B ont même aire et si B est un disque, alors

$$\lambda_0(B) \leq \lambda_0(A).$$

L'égalité a lieu si et seulement si B est aussi un disque.

Version quantitative : Il existe $c > 0$ tel que (Brasco, De Philippis, Velichkov, 2015)

$$\lambda_0(A) - \lambda_0(B) \geq c \inf_{h \in \mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{aire}(A \Delta (B+h))^2}{\mathrm{aire}(A)^3}.$$

Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn polygonale

Un problème encore ouvert

Problème ouvert

Si P et R sont des polygones de même aire et même nombres de côté et si R est régulier, a-t-on

$$\lambda_0(R) \leq \lambda_0(P)?$$

- oui pour les triangles et les quadrilatères,
- totalement ouvert à partir des pentagones.

Je veux le plus grand

Formes optimales et mathématiques

Principe de symétrie de Curie

Les arbres de Steiner

Problème isopérimétrique

Inégalité de Rayleigh–Faber–Krahn

Symétrie et résistance minimale

Le problème de la résistance minimale

Un problème qui remonte à Newton

J. Van Schaftingen

If in a rare medium, consisting of equal particles freely disposed at equal distances from each other, a globe and a cylinder described on equal diameter move with equal velocities in the direction of the axis of the cylinder, [then] the resistance of the globe will be half as great as that of the cylinder. [...] I reckon that this proposition will be not without application in the building of ships.

Sir Isaac Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1687

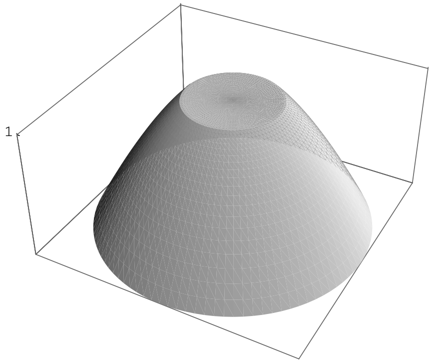
Mathématiquement on minimise une quantité

$$\int_D \frac{1}{1+|\nabla f|^2}$$

avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$ le disque et la fonction $f : D \to [0, M]$ concave.

Le candidat symétrique

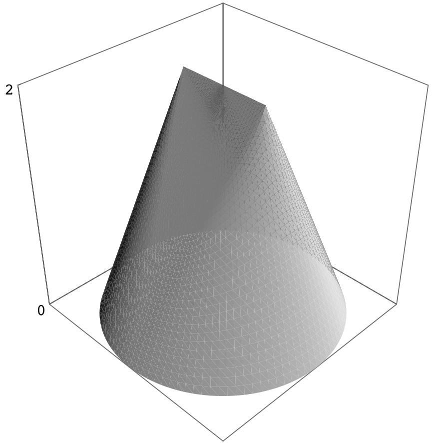
On peut calculer explicitement un minimiseur parmi les profils radiaux.



G. Butazzo

Mieux que le candidat radial

On peut faire mieux que le profil radial (Guasoni, 1995).



G. Butazzo

Une dernière symétrie…