



Le mystère de 153

Max Joseph, Tom Magnan, Cyprien Nassogne, Lucas Tombeux

Mai 2023

- 1 Sujet de la recherche
- 2 Simulations
- 3 Critère de divisibilité par 3
- 4 Transformations d'un naturel
- 5 Évolution des transformations

Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

$$3 \longrightarrow 3^3 = 27 \longrightarrow 2^3 + 7^3 = 351 \longrightarrow 153$$

Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

$$3 \longrightarrow 3^3 = 27 \longrightarrow 2^3 + 7^3 = 351 \longrightarrow 153$$

$$9 \longrightarrow 9^3 = 729 \longrightarrow 1080 \longrightarrow 513 \longrightarrow 153$$

Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

$$3 \longrightarrow 3^3 = 27 \longrightarrow 2^3 + 7^3 = 351 \longrightarrow 153$$

$$9 \longrightarrow 9^3 = 729 \longrightarrow 1080 \longrightarrow 513 \longrightarrow 153$$

$$72 \longrightarrow 7^3 + 2^3 = 351 \longrightarrow 153$$

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

$$3 \longrightarrow 3^3 = 27 \longrightarrow 2^3 + 7^3 = 351 \longrightarrow 153$$

$$9 \longrightarrow 9^3 = 729 \longrightarrow 1080 \longrightarrow 513 \longrightarrow 153$$

$$72 \longrightarrow 7^3 + 2^3 = 351 \longrightarrow 153$$

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?

Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

$$3 \longrightarrow 3^3 = 27 \longrightarrow 2^3 + 7^3 = 351 \longrightarrow 153$$

$$9 \longrightarrow 9^3 = 729 \longrightarrow 1080 \longrightarrow 513 \longrightarrow 153$$

$$72 \longrightarrow 7^3 + 2^3 = 351 \longrightarrow 153$$

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?
- Sinon atteint-on toujours une valeur stable ? Laquelle ?

Simulations pour les nombres de 1 à 15

Transformations successives en colonnes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8													
1	512													
...	134													
	92													
	737													
	713													
	371													
	371													
	...													

Simulations pour les nombres de 1 à 15

Transformations successives en colonnes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27												
1	512	351												
...	134	153												
	92	153												
	737	...												
	713													
	371													
	371													
	...													

Simulations pour les nombres de 1 à 15

Transformations successives en colonnes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	371	1458
	371		702			371			...	702
	...				351					371				351
					153					...				153
					153									153
				

Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

		↓			↓			↓			↓			↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	371	1458
	371		702			371			...	702
	...				351					371				351
					153					...				153
					153									153
				

Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

		↓			↓			↓			↓			↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	371	1458
	371		702			371			...	702
	...				351					371				351
					153					...				153
					153									153
				

Multiple de 3 → multiple de 3 → ... → 153

Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

	↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	371	1458
	371		702			371			...	702
	...				351					371				351
					153					...				153
					153									153
				

Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

	↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	371	1458
	371		702			371			...	702
	...				351					371				351
					153					...				153
					153									153
				

Multiple de 3 +2 → multiple de 3 +2 → ... → 371

Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	...	55	371	1458
	371		55	...	702			371		250	...	702
	...		250		351					371		133		351
			133		153						153
			...		153									153
				

Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓	↓		↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	8	27	64	125	21	343	512	729	1	2	9	28	65	126
1	512	351	280	134	225	118	134	1080	1	8	729	520	341	225
...	134	153	520	92	141	514	92	513	...	512	1080	133	92	141
	92	153	133	737	66	190	737	153		134	513	55	737	66
	737	...	55	713	432	730	713	153		92	153	250	713	432
	713		250	371	99	370	371	...		737	153	133	371	99
	371		133	371	1458	370	371			713	...	55	371	1458
	371		55	...	702			371		250	...	702
	...		250		351					371		133		351
			133		153						153
			...		153									153
				

Multiple de 3 + 1 \rightarrow multiple de 3 + 1 \rightarrow ... \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 370 \\ (133, 55, 250) \end{array} \right.$

Extension des simulations

Multiple de 3 \rightarrow multiple de 3 $\rightarrow \dots \rightarrow$ 153

Multiple de 3 + 2 \rightarrow multiple de 3 + 2 $\rightarrow \dots \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} 371 \\ 407 \end{array} \right.$

Extension des simulations

Multiple de 3 \rightarrow multiple de 3 $\rightarrow \dots \rightarrow 153$

Multiple de 3 + 2 \rightarrow multiple de 3 + 2 $\rightarrow \dots \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} 371 \\ 407 \end{array} \right.$

Multiple de 3 + 1 \rightarrow multiple de 3 + 1 $\rightarrow \dots \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} 1,370 \\ (133,55,250) \\ (217,352,160) \\ (244,136) \\ (1459,919) \end{array} \right.$

98	4	16	136	49
1241	64	217	244	793
74	280	352	136	1099
407	520	160	244	1459
...	133	217	...	919
	55	...		1459
	250			...
	133			

Donc revenons-en à nos questions du début

- Est-ce un hasard ?

Donc revenons-en à nos questions du début

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?

Donc revenons-en à nos questions du début

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?
- Sinon atteint-on toujours une valeur stable ? Laquelle ?

Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

Nombre	Somme des chiffres
--------	--------------------

Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

Nombre	Somme des chiffres
$153 = 3 \cdot 51 + 0$	$1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$

Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

Nombre	Somme des chiffres
$153 = 3 \cdot 51 + 0$	$1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$
$16 = 3 \cdot 5 + 1$	$1 + 6 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$

Critère de divisibilité

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

Nombre	Somme des chiffres
$153 = 3 \cdot 51 + 0$	$1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$
$16 = 3 \cdot 5 + 1$	$1 + 6 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$
$23 = 3 \cdot 7 + 2$	$2 + 3 = 5 = 3 \cdot 1 + 2$

Critère de divisibilité

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

Nombre	Somme des chiffres
$153 = 3 \cdot 51 + 0$	$1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$
$16 = 3 \cdot 5 + 1$	$1 + 6 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$
$23 = 3 \cdot 7 + 2$	$2 + 3 = 5 = 3 \cdot 1 + 2$

Généralisation du critère de divisibilité par 3

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

On note un nombre à 3 chiffres \overline{cdu}
où

- c = nombre des centaines
- d = nombre des dizaines
- u = nombre des unités

Exemple

$$\overline{cdu} = 153$$

- $c = 1$
- $d = 5$
- $u = 3$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \mathbb{N}$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\overline{cdu} = 100c + 10d + u = 99c + 9d + (c + d + u)$$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N}$: $\overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\begin{aligned}\overline{cdu} &= 100c + 10d + u = 99c + 9d + (c + d + u) \\ &= 99c + 9d + 3k + r\end{aligned}$$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\begin{aligned}\overline{cdu} &= 100c + 10d + u &= 99c + 9d + (c + d + u) \\ & &= 99c + 9d + 3k + r \\ & &= 3(33c + 3d + k) + r\end{aligned}$$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\begin{aligned}\overline{cdu} &= 100c + 10d + u &= 99c + 9d + (c + d + u) \\ & &= 99c + 9d + 3k + r \\ & &= 3(33c + 3d + k) + r \\ & &= 3n + r\end{aligned}$$

Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Exemples :

$$21 \longrightarrow T(21) = 2^3 + 1^3 = 9$$

$$25 \longrightarrow T(25) = 2^3 + 5^3 = 133$$

$$14 \longrightarrow T(14) = 1^3 + 4^3 = 65$$

Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Exemples :

$$21 \longrightarrow T(21) = 2^3 + 1^3 = 9$$

$$25 \longrightarrow T(25) = 2^3 + 5^3 = 133$$

$$14 \longrightarrow T(14) = 1^3 + 4^3 = 65$$

Observations :

- Multiple de 3 + 0 \longrightarrow multiple de 3 + 0
- Multiple de 3 + 1 \longrightarrow multiple de 3 + 1
- Multiple de 3 + 2 \longrightarrow multiple de 3 + 2

Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Exemples :

$$21 \longrightarrow T(21) = 2^3 + 1^3 = 9$$

$$25 \longrightarrow T(25) = 2^3 + 5^3 = 133$$

$$14 \longrightarrow T(14) = 1^3 + 4^3 = 65$$

Observations :

- Multiple de 3 + 0 \longrightarrow multiple de 3 + 0
- Multiple de 3 + 1 \longrightarrow multiple de 3 + 1
- Multiple de 3 + 2 \longrightarrow multiple de 3 + 2

Question :

Si \overline{du} est multiple de 3 + r , $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est-il multiple de 3 + r ?

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 2 chiffres.

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 2 chiffres.

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Étude de la transformée d'un naturel

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 2 chiffres.

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de $3 + r$.

Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de $3 + r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de $3 + r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$d^3 + u^3 = (d + u)^3 - 3(d^2u + du^2)$$

Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de $3 + r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$\begin{aligned} d^3 + u^3 &= (d + u)^3 - 3(d^2u + du^2) \\ &= (3k' + r)^3 - 3(d^2u + du^2) \end{aligned}$$

Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de $3 + r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$\begin{aligned}d^3 + u^3 &= (d + u)^3 - 3(d^2u + du^2) \\ &= (3k' + r)^3 - 3(d^2u + du^2) \\ &= 3 \cdot 9k'^3 + r^3 + 3 \cdot 9k'^2r + 3 \cdot 3k'r^2 - 3(d^2u + du^2)\end{aligned}$$

Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec k entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de $3 + r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$\begin{aligned}d^3 + u^3 &= (d + u)^3 - 3(d^2u + du^2) \\&= (3k' + r)^3 - 3(d^2u + du^2) \\&= 3 \cdot 9k'^3 + r^3 + 3 \cdot 9k'^2r + 3 \cdot 3k'r^2 - 3(d^2u + du^2) \\&= 3(9k'^3 + 9k'^2r + 3k'r^2 - d^2u - du^2) + r^3\end{aligned}$$

D'où $d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec n entier.

Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec n entier.

- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 0, on a $r = 0$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.

Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec n entier.

- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 0, on a $r = 0$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 1, on a $r = 1$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de $3 + 1$

Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec n entier.

- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 0, on a $r = 0$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 1, on a $r = 1$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de $3 + 1$
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 2, on a $r = 2$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 2^3 = 3(n + 2) + 2$ est un multiple de $3 + 2$.

Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec n entier.

- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 0, on a $r = 0$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 1, on a $r = 1$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de $3 + 1$
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 2, on a $r = 2$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 2^3 = 3(n + 2) + 2$ est un multiple de $3 + 2$.

Dans les 3 cas, on vérifie que $d^3 + u^3$ est multiple de $3 + r$.

Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec n entier.

- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 0, on a $r = 0$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 1, on a $r = 1$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de $3 + 1$
- Si le reste de la division de \overline{du} par 3 vaut 2, on a $r = 2$:
 $d^3 + u^3 = 3n + 2^3 = 3(n + 2) + 2$ est un multiple de $3 + 2$.

Dans les 3 cas, on vérifie que $d^3 + u^3$ est multiple de $3 + r$.

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Conclusion

Donc

- Multiple de 3 + 0 \rightarrow multiple de 3 + 0
- Multiple de 3 + 1 \rightarrow multiple de 3 + 1
- Multiple de 3 + 2 \rightarrow multiple de 3 + 2

Donc

on ne peut obtenir 153 que si le nombre initial est un multiple de 3.

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153
- Toujours un cycle
 - 5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
 - 2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459, 919)
 - 2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153
- Toujours un cycle
 - 5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
 - 2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459, 919)
 - 2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153
- Toujours un cycle
 - 5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
 - 2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459, 919)
 - 2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153
- Toujours un cycle
 - 5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
 - 2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459, 919)
 - 2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?
- A-t-on d'autres cycles ?

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153
- Toujours un cycle
 - 5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
 - 2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459, 919)
 - 2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?
- A-t-on d'autres cycles ?
- Si oui, quelle est sa longueur maximale ?

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 \rightarrow 153
- Toujours un cycle
 - 5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
 - 2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459, 919)
 - 2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?
- A-t-on d'autres cycles ?
- Si oui, quelle est sa longueur maximale ?
- Quel est le nombre maximum d'itérations avant de débiter le cycle ?

Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

Comment évolue le nombre de chiffres au fil des transformations ?

Nb de chiffres du nb initial	Transformée maximale	Nb max de chiffres de la transformée
1	$9 \rightarrow 9^3 = 729$	3
2	$99 \rightarrow 2 \cdot 9^3 = 1458$	4
3	$999 \rightarrow 3 \cdot 9^3 = 2187$	4
4	$9999 \rightarrow 4 \cdot 9^3 = 2916$	4
13	$9 \dots 9 \rightarrow 13 \cdot 9^3 = 9477$	4
14	$9 \dots 9 \rightarrow 14 \cdot 9^3 = 10206$	5

Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

Conjectures

- Tout nombre à 5 chiffres ou plus se transforme en un nombre plus petit.

Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

Conjectures

- Tout nombre à 5 chiffres ou plus se transforme en un nombre plus petit.
- Tout nombre va se transformer en un nombre de $[1, 9\,999]$ au bout d'un certain nombre d'itérations.

Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

Conjectures

- Tout nombre à 5 chiffres ou plus se transforme en un nombre plus petit.
- Tout nombre va se transformer en un nombre de $[1, 9\,999]$ au bout d'un certain nombre d'itérations.
- Il n'y a pas d'autres valeurs, ni cycles que ceux trouvés lors des simulations.

Quand commence un cycle ?

Observations à partir de simulations :

9477 → 1479 → 1137 → 372 → 378 → 882 → 1032 → 36 → 243
→ 99 → 1458 → 702 → 351 → 153

Nombre initial	Cycle après
$n < 10^4$	13 transformations au maximum
$10^4 \leq n < 10^{13}$	14 transformations au maximum
$10^{14} \leq n < 10^{137}$	15 transformations au maximum
...	

Nombre de transformations avant un cycle : croissance très lente

Et si on calculait la somme des carrés des chiffres d'un nombre ?

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

MERCI

à Julien Leroy de l'Université de Liège,
à l'équipe Math en Jeans.

