

## Rebonds en chaîne

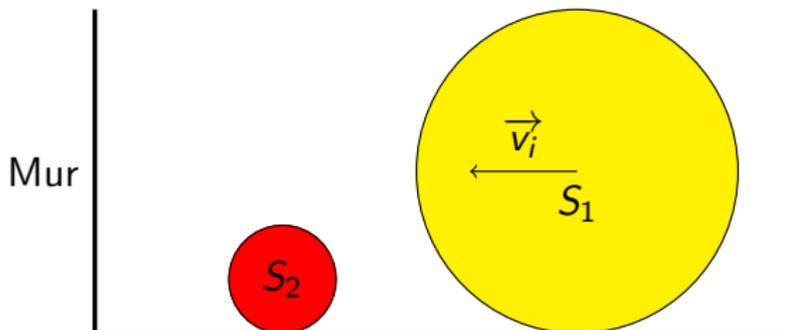
J. Arias Luna et G. Gielen

August 23, 2023

- 1 Présentation du sujet
- 2 Quelques rappels de physique
- 3 Etude phase par phase
- 4 Etude de la suite des vitesses
- 5 Solution

## Schéma

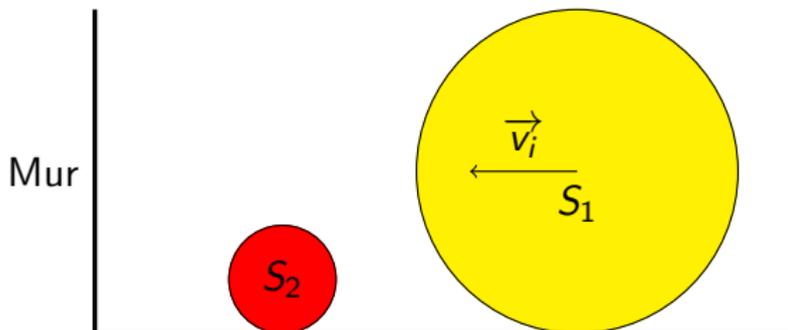
Une petite sphère, initialement au repos, est située entre un mur et une grande sphère en MRU en direction du mur.



## Schéma

Une petite sphère, initialement au repos, est située entre un mur et une grande sphère en MRU en direction du mur.

**Problématique** : combien de chocs y aura-t-il en fonction de la répartition des masses ?



## Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères  $S_1$  et  $S_2$

## Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères  $S_1$  et  $S_2$

- se déplacent selon une droite horizontale.

## Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères  $S_1$  et  $S_2$

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.

## Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères  $S_1$  et  $S_2$

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.
- respectent les principes des chocs élastiques lorsqu'elles entrent en collision entre elles et avec le mur.

## Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères  $S_1$  et  $S_2$

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.
- respectent les principes des chocs élastiques lorsqu'elles entrent en collision entre elles et avec le mur.
- ont des masses  $m_1$  et  $m_2$  respectivement avec  $m_1 > m_2$ .

## Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères  $S_1$  et  $S_2$

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.
- respectent les principes des chocs élastiques lorsqu'elles entrent en collision entre elles et avec le mur.
- ont des masses  $m_1$  et  $m_2$  respectivement avec  $m_1 > m_2$ .
- ont des vitesses positives en se déplaçant vers le mur et négatives dans le cas inverse.

## L'énergie cinétique

L'*énergie cinétique*  $E_k$  d'un corps de masse  $m$  et se déplaçant à la vitesse  $v$  est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

## Quantité de mouvement

La *quantité de mouvement*  $p$  d'un corps est le produit de sa masse  $m$  par sa vitesse  $\vec{v}$ . On a :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

## Choc élastique

Dans un *choc élastique*, il y a conservation

- de la quantité de mouvement totale  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
- et de l'énergie cinétique totale  $E_k = E_{k1} + E_{k2}$

du système à tout instant.

## Choc élastique

Dans un *choc élastique*, il y a conservation

- de la quantité de mouvement totale  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
- et de l'énergie cinétique totale  $E_k = E_{k1} + E_{k2}$

du système à tout instant.

$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \end{cases}$$

# Choc élastique

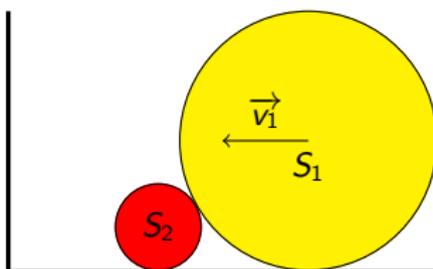
$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \end{cases}$$

## Choc élastique

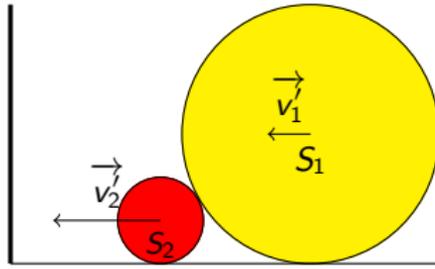
$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \end{cases}$$

En tenant compte du sens de  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  dans le signe de  $v_1$  et  $v_2$ , on a

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \end{cases}$$



Avant le choc



Après le choc

## Calcul des vitesses résultantes

Pour trouver les vitesses  $v_1'$  et  $v_2'$  des sphères après un choc élastique, il faut résoudre :

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \end{cases}$$

## Calcul des vitesses résultantes

Pour trouver les vitesses  $v'_1$  et  $v'_2$  des sphères après un choc élastique, il faut résoudre :

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

## Rapport des masses

Posons  $k = \frac{m_1}{m_2}$ , c'àd  $k$  est le *rapport des masses*.

Comme  $m_1 > m_2$ ,  $k > 1$ .

Après introduction de  $k$ , les solutions

## Rapport des masses

Posons  $k = \frac{m_1}{m_2}$ , c'ad  $k$  est le *rapport des masses*.

Comme  $m_1 > m_2$ ,  $k > 1$ .

Après introduction de  $k$ , les solutions

$$\begin{cases} v_1' = \frac{k \cdot m_2 - m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_2 \\ v_2' = \frac{2k \cdot m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - k \cdot m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_2 \end{cases}$$

## Rapport des masses

Posons  $k = \frac{m_1}{m_2}$ , c'ad  $k$  est le *rapport des masses*.

Comme  $m_1 > m_2$ ,  $k > 1$ .

Après introduction de  $k$ , les solutions

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{k \cdot m_2 - m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_2 \\ v'_2 = \frac{2k \cdot m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - k \cdot m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_2 \end{cases}$$

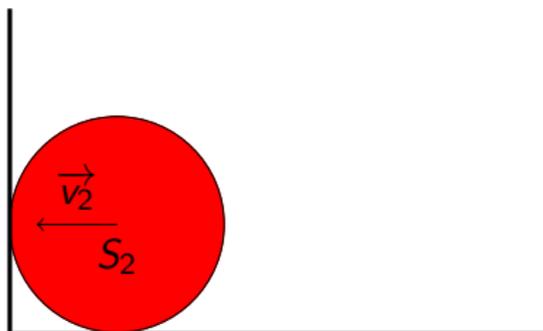
deviennent

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{k-1}{k+1} v_1 + \frac{2}{k+1} v_2 \\ v'_2 = \frac{2k}{k+1} v_1 - \frac{k-1}{k+1} v_2 \end{cases} \quad (1)$$

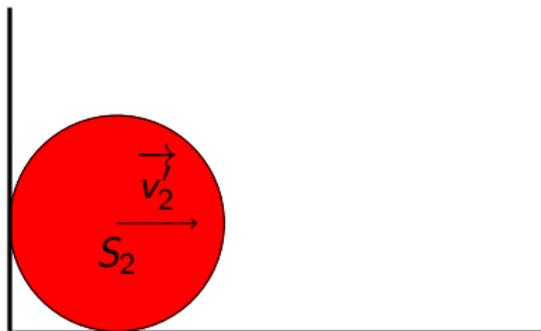
## Choc élastique de $S_2$ avec le mur

Etudions uniquement le choc résultant de la collision entre  $S_2$  et le mur et considérons que celui-ci est élastique.

$$\Rightarrow v_2 = -v_2'$$



avant le choc



après le choc

## Vitesses résultantes après le premier choc

Comme, au départ,  $v_2 = 0$  et  $v_1 = v_i$ , on obtient

$$\begin{cases} v_1' = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2' = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases}$$

# Décomposition du mouvement en phases

## Définition des phases

## Décomposition du mouvement en phases

### Définition des phases

- Nommons la phase initiale  $P_0$ , phase qui a lieu lors de la première collision entre  $S_1$  et  $S_2$ .

## Décomposition du mouvement en phases

### Définition des phases

- Nommons la phase initiale  $P_0$ , phase qui a lieu lors de la première collision entre  $S_1$  et  $S_2$ .
- Le choc suivant entre les deux sphères entame la phase suivante  $P_1$

## Décomposition du mouvement en phases

### Définition des phases

- Nommons la phase initiale  $P_0$ , phase qui a lieu lors de la première collision entre  $S_1$  et  $S_2$ .
- Le choc suivant entre les deux sphères entame la phase suivante  $P_1$
- La phase  $P_n$  caractérise donc l'état du mouvement entre le  $n + 1^e$  choc et le suivant.

## Décomposition du mouvement en phases

### Définition des phases

- Nommons la phase initiale  $P_0$ , phase qui a lieu lors de la première collision entre  $S_1$  et  $S_2$ .
- Le choc suivant entre les deux sphères entame la phase suivante  $P_1$
- La phase  $P_n$  caractérise donc l'état du mouvement entre le  $n + 1^e$  choc et le suivant.
- Soient  $v_1(P_n)$  et  $v_2(P_n)$  les vitesses respectives de  $S_1$  et  $S_2$  associées à la phase  $n$ .

## Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases} \quad (2)$$

## Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

## Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

- les vitesses ne dépendent que du rapport des masses  $k$  pour une vitesse  $v_i$  donnée.

## Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

- les vitesses ne dépendent que du rapport des masses  $k$  pour une vitesse  $v_i$  donnée.
- Les vitesses sont positives. Les deux solides se dirigent donc vers le mur.

## Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

- les vitesses ne dépendent que du rapport des masses  $k$  pour une vitesse  $v_i$  donnée.
- Les vitesses sont positives. Les deux solides se dirigent donc vers le mur.
- $v_2 > v_1$  :  $S_2$  va plus vite que  $S_1$ . Le choc suivant aura lieu quand  $S_2$  aura rebondi sur le mur.

## Vitesses résultantes après le 2eme choc entre les sphères

Pour le deuxième choc ( $P_1$ ),  $S_2$  a une vitesse  $-v_2(P_0) < 0$ . En tenant compte de ce changement on a:

## Vitesses résultantes après le 2eme choc entre les sphères

Pour le deuxième choc ( $P_1$ ),  $S_2$  a une vitesse  $-v_2(P_0) < 0$ . En tenant compte de ce changement on a :

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_1(P_0) - \frac{2}{k+1} \cdot v_2(P_0) \\ v_2(P_1) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_0) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_0) \end{cases}$$

## Vitesses résultantes après le 2eme choc entre les sphères

Pour le deuxième choc ( $P_1$ ),  $S_2$  a une vitesse  $-v_2(P_0) < 0$ . En tenant compte de ce changement on a :

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_1(P_0) - \frac{2}{k+1} \cdot v_2(P_0) \\ v_2(P_1) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_0) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1(P_1) = \frac{k^2 - 6k + 1}{(k+1)^2} \cdot v_i \\ v_2(P_1) = \frac{4k \cdot (k-1)}{(k+1)^2} \cdot v_i > 0 \end{cases}$$

## Etude du mouvement de $S_1$ après le 2eme choc

En factorisant  $v_1(P_1)$ , on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2\sqrt{2})) \overbrace{(k - (3 - 2\sqrt{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} \cdot v_i$$

## Etude du mouvement de $S_1$ après le 2eme choc

En factorisant  $v_1(P_1)$ , on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2\sqrt{2})) \overbrace{(k - (3 - 2\sqrt{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} \cdot v_i$$

Comme  $k > 1$ , il y a trois cas pour la phase  $P_2$  :

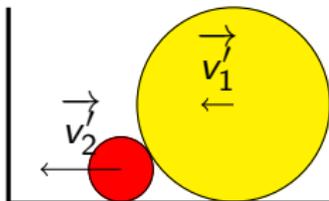
## Etude du mouvement de $S_1$ après le 2eme choc

En factorisant  $v_1(P_1)$ , on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2\sqrt{2})) \overbrace{(k - (3 - 2\sqrt{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} \cdot v_i$$

Comme  $k > 1$ , il y a trois cas pour la phase  $P_2$  :

- $k > 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $v_1(P_1) > 0$  et  $S_1$  continue vers le mur.



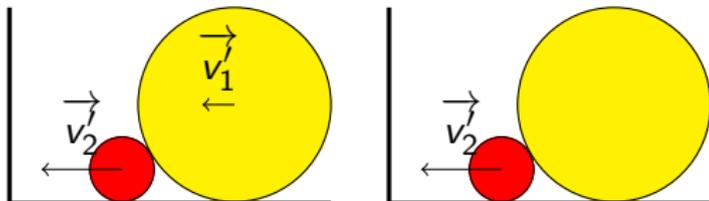
## Etude du mouvement de $S_1$ après le 2eme choc

En factorisant  $v_1(P_1)$ , on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2\sqrt{2})) \overbrace{(k - (3 - 2\sqrt{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} \cdot v_i$$

Comme  $k > 1$ , il y a trois cas pour la phase  $P_2$  :

- $k > 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $v_1(P_1) > 0$  et  $S_1$  continue vers le mur.
- $k = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $S_1$  s'immobilise.



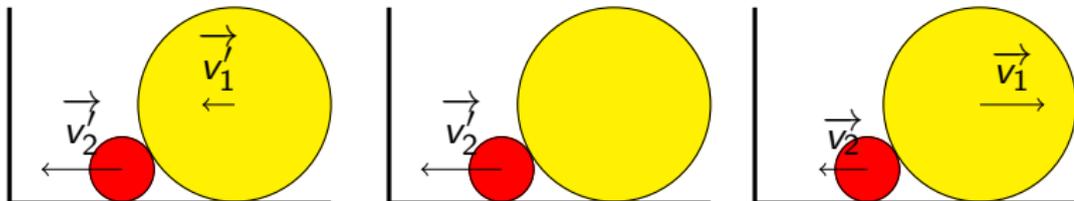
## Etude du mouvement de $S_1$ après le 2eme choc

En factorisant  $v_1(P_1)$ , on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2\sqrt{2})) \overbrace{(k - (3 - 2\sqrt{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} \cdot v_i$$

Comme  $k > 1$ , il y a trois cas pour la phase  $P_2$  :

- $k > 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $v_1(P_1) > 0$  et  $S_1$  continue vers le mur.
- $k = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $S_1$  s'immobilise.
- $1 < k < 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $v_1(P_1) < 0$  et  $S_1$  s'éloigne du mur.



## $S_2$ rejoint-il $S_1$ lorsque $v_1(P_1) < 0$ ?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si  $|v_2| > |v_1|$ .

## $S_2$ rejoint-il $S_1$ lorsque $v_1(P_1) < 0$ ?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si  $|v_2| > |v_1|$ .

- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| > 0 \Rightarrow S_2$  rejoint  $S_1$ ,

## $S_2$ rejoint-il $S_1$ lorsque $v_1(P_1) < 0$ ?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si  $|v_2| > |v_1|$ .

- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| > 0 \Rightarrow S_2$  rejoint  $S_1$ ,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| = 0 \Rightarrow S_2$  et  $S_1$  ont la même vitesse,

## $S_2$ rejoint-il $S_1$ lorsque $v_1(P_1) < 0$ ?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si  $|v_2| > |v_1|$ .

- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| > 0 \Rightarrow S_2$  rejoint  $S_1$ ,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| = 0 \Rightarrow S_2$  et  $S_1$  ont la même vitesse,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| < 0 \Rightarrow S_1$  s'éloigne plus vite que  $S_2$ . Il n'y aura plus de choc dans les deux derniers cas !

## $S_2$ rejoint-il $S_1$ lorsque $v_1(P_1) < 0$ ?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si  $|v_2| > |v_1|$ .

- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| > 0 \Rightarrow S_2$  rejoint  $S_1$ ,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| = 0 \Rightarrow S_2$  et  $S_1$  ont la même vitesse,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| < 0 \Rightarrow S_1$  s'éloigne plus vite que  $S_2$ . Il n'y aura plus de choc dans les deux derniers cas !

On doit donc établir le signe de la fonction

$$f(k) = |v_2(P_1)| - |v_1(P_1)|$$

## $S_2$ rejoint-il $S_1$ lorsque $v_1(P_1) < 0$ ?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si  $|v_2| > |v_1|$ .

- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| > 0 \Rightarrow S_2$  rejoint  $S_1$ ,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| = 0 \Rightarrow S_2$  et  $S_1$  ont la même vitesse,
- $|v_2(P_1)| - |v_1(P_1)| < 0 \Rightarrow S_1$  s'éloigne plus vite que  $S_2$ . Il n'y aura plus de choc dans les deux derniers cas !

On doit donc établir le signe de la fonction

$$f(k) = |v_2(P_1)| - |v_1(P_1)|$$

càd

$$f(k) = \frac{4k \cdot (k - 1) + k^2 - 6k + 1}{(k + 1)^2} = \frac{(k - \frac{5-2\sqrt{5}}{5})(k - \frac{5+2\sqrt{5}}{5})}{(k + 1)^2}$$

$S_2$  rejoint-il  $S_1$  lorsque  $v_1(P_1) < 0$  ?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(k - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}\right)}^{>0}}{(k+1)^2}$$

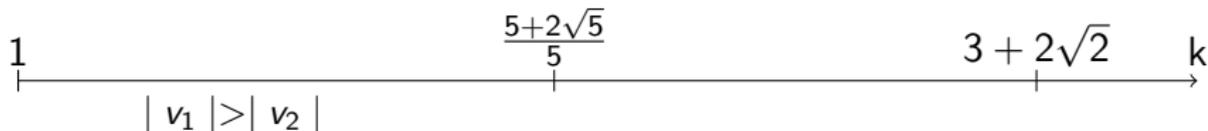
les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

$S_2$  rejoint-il  $S_1$  lorsque  $v_1(P_1) < 0$  ?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(k - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}\right)}^{>0}}{(k+1)^2}$$

les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

- $1 < k < \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_1$  s'éloigne du mur plus vite que  $S_2$ .

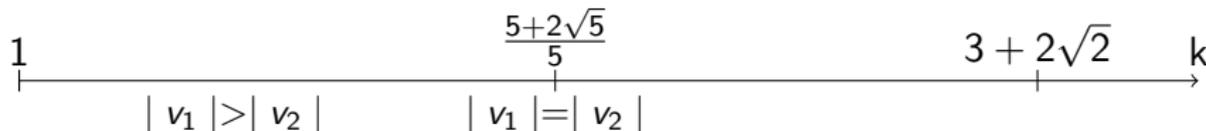


$S_2$  rejoint-il  $S_1$  lorsque  $v_1(P_1) < 0$  ?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(k - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}\right)}^{>0}}{(k+1)^2}$$

les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

- $1 < k < \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_1$  s'éloigne du mur plus vite que  $S_2$ .
- $k = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_2$  et  $S_1$  ont des vitesses égales,

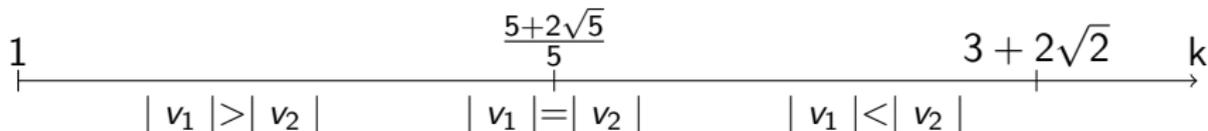


$S_2$  rejoint-il  $S_1$  lorsque  $v_1(P_1) < 0$  ?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(k - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}\right)}^{>0}}{(k+1)^2}$$

les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

- $1 < k < \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_1$  s'éloigne du mur plus vite que  $S_2$ .
- $k = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_2$  et  $S_1$  ont des vitesses égales,
- $\frac{5+2\sqrt{5}}{5} < k < 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow S_2$  rejoint  $S_1$



## Limite du procédé " pas à pas"

L'étude menée pour les deux premiers chocs pourrait être poursuivie pour savoir dans quelle(s) condition(s) il y aurait un 3e choc, puis un 4e etc.

**Mais** les calculs vont devenir de plus en plus lourds.

⇒ On va donc changer de méthode.

## Généralisation de la formule d'itération

Quelle que soit la phase, la formule de récurrence est inchangée :

$\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_1(P_{n-1}) - \frac{2}{k+1} \cdot v_2(P_{n-1}) \\ v_2(P_n) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_{n-1}) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

## Généralisation de la formule d'itération

Quelle que soit la phase, la formule de récurrence est inchangée :

$\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_1(P_{n-1}) - \frac{2}{k+1} \cdot v_2(P_{n-1}) \\ v_2(P_n) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_{n-1}) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

Est-il possible de déterminer la formule qui donne le terme général  $v_1(P_n)$  et  $v_2(P_n)$  en fonction de  $k$  et de  $v_i$  ?

## Premiers termes de la suite en fonction de $v_i$ et $k$

Regardons les expressions de  $v_1$  et de  $v_2$  aux phases  
 $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$

## Premiers termes de la suite en fonction de $v_i$ et $k$

Regardons les expressions de  $v_1$  et de  $v_2$  aux phases  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 - 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 - 4k) \end{cases}$$

## Premiers termes de la suite en fonction de $v_i$ et $k$

Regardons les expressions de  $v_1$  et de  $v_2$  aux phases  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 - 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 - 4k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (k^3 - 15k^2 + 15k - 1) \\ v_2(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (6k^3 - 20k^2 + 6k) \end{cases}$$

## Premiers termes de la suite en fonction de $v_i$ et $k$

Regardons les expressions de  $v_1$  et de  $v_2$  aux phases  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 - 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 - 4k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (k^3 - 15k^2 + 15k - 1) \\ v_2(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (6k^3 - 20k^2 + 6k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (k^4 - 28k^3 + 70k^2 - 28k + 1) \\ v_2(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (8k^4 - 56k^3 + 56k^2 - 8k) \end{cases}$$

# Premiers termes de la suite en fonction de $v_i$ et $k$

Regardons les expressions de  $v_1$  et de  $v_2$  aux phases  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 - 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 - 4k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (k^3 - 15k^2 + 15k - 1) \\ v_2(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (6k^3 - 20k^2 + 6k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (k^4 - 28k^3 + 70k^2 - 28k + 1) \\ v_2(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (8k^4 - 56k^3 + 56k^2 - 8k) \end{cases}$$

On remarque que des motifs se répètent (puissance, signe...), et que les coefficients sont ceux du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

	$p$								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

## Terme général de la suite des vitesses en fonction de $v_i$ et $k$

On a, dans un premier temps, "pressenti" la formule donnant le terme général  $v_1(P_n)$  et  $v_2(P_n)$  en fonction du rapport des masses :

## Terme général de la suite des vitesses en fonction de $v_i$ et $k$

On a, dans un premier temps, "pressenti" la formule donnant le terme général  $v_1(P_n)$  et  $v_2(P_n)$  en fonction du rapport des masses :  
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ v_2(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \end{cases} \quad (4)$$

Ces expressions nous permettent de voir que les numérateurs de  $v_1(P_n)$  et  $v_2(P_n)$  sont tous deux des polynômes de degré  $n+1$  en  $k$ .

## Démonstration par récurrence (cas de base)

Démontrons par récurrence la formule précédente. Le cas de base est  $n = 0$ .

## Démonstration par récurrence (cas de base)

Démontrons par récurrence la formule précédente. Le cas de base est  $n = 0$ .

$$\text{Pour } v_1(P_0) : \frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^{0+1} C_{2 \cdot 0+2}^{2p} (-1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} (k-1)$$

## Démonstration par récurrence (cas de base)

Démontrons par récurrence la formule précédente. Le cas de base est  $n = 0$ .

$$\text{Pour } v_1(P_0) : \frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^{0+1} C_{2 \cdot 0+2}^{2p} (-1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} (k-1)$$

$$\text{Pour } v_2(P_0) : \frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^0 C_{2 \cdot 0+2}^{2p+1} (-1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} \cdot 2k$$

# Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

$\forall 0 \leq p \leq n+1, n \in \mathbb{N} :$

$$C_{2n+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}$$

# Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

$$\forall 0 \leq p \leq n+1, n \in \mathbb{N} :$$

$$\begin{aligned} & C_{2n+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \end{aligned}$$

# Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

$$\forall 0 \leq p \leq n+1, n \in \mathbb{N} :$$

$$\begin{aligned} & C_{2n+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \\ &= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1} \end{aligned}$$

# Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

$$\forall 0 \leq p \leq n+1, n \in \mathbb{N} :$$

$$\begin{aligned} & C_{2n+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \\ &= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1} \\ &= C_{2n+4}^{2p} \end{aligned}$$

# Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

$$\forall 0 \leq p \leq n+1, n \in \mathbb{N} :$$

$$C_{2n+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}$$

$$= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2})$$

$$= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1}$$

$$= C_{2n+4}^{2p}$$

$$\text{Exemple : } C_4^4 + 2 \cdot C_4^3 + C_4^2 = C_4^4$$

Triangle de Pascal

	$p$								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

## Etape d'induction

En supposant l'égalité vraie pour  $n = N$ , démontrons-la pour  $n = N + 1$ .

Pour  $v_1$  :

## Etape d'induction

En supposant l'égalité vraie pour  $n = N$ , démontrons-la pour  $n = N + 1$ .

Pour  $v_1$  :

$$v_1(P_{N+1}) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_1(P_N) - \frac{2}{k+1} \cdot v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

## Etape d'induction

En supposant l'égalité vraie pour  $n = N$ , démontrons-la pour  $n = N + 1$ .

Pour  $v_1$  :

$$v_1(P_{N+1}) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_1(P_N) - \frac{2}{k+1} \cdot v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

$$= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

## Etape d'induction

$$= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

## Etape d'induction

$$\begin{aligned} &= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( (k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right) \end{aligned}$$

## Etape d'induction

$$\begin{aligned} &= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( (k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right) \end{aligned}$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

## Etape d'induction

$$\begin{aligned} &= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( (k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right) \end{aligned}$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Séparation du premier terme de la première somme, et du dernier terme de la dernière somme :

$$\begin{aligned} &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right) \end{aligned}$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Renumérotation des indices de la deuxième et troisième somme :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2 \cdot C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p-2} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Renumérotation des indices de la deuxième et troisième somme :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2 \cdot C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p-2} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Jonction des sommes :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} (C_{2N+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2N+2}^{2p-1} + C_{2N+2}^{2p-2}) (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Renumérotation des indices de la deuxième et troisième somme :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2 \cdot C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p-2} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Jonction des sommes :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} (C_{2N+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2N+2}^{2p-1} + C_{2N+2}^{2p-2}) (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right) \\ = \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

## Etape d'induction

$$\begin{aligned} &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \sum_{p=0}^{N+2} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \end{aligned}$$

Ceci complète la récurrence pour  $v_1(P_n)$ .

## Etape d'induction

Pour  $v_2$  :

## Etape d'induction

Pour  $v_2$  :

$$v_2(P_{N+1}) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

## Etape d'induction

Pour  $v_2$  :

$$v_2(P_{N+1}) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

$$= \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

## Etape d'induction

Pour  $v_2$  :

$$v_2(P_{N+1}) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} \cdot v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

$$= \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

Mise en évidence :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( 2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( 2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( 2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

## Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( 2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \cdot \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Séparation du premier terme de la première somme, des premier et dernier termes de la deuxième somme, et du dernier terme de la dernière somme :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( C_{2N+2}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + 2k^{N+2} + \sum_{p=1}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + (-1)^{N+1} 2k + \sum_{p=0}^{N-1} C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} \cdot k \right)$$

## Étape d'induction

Les premiers termes de la première et deuxième somme, et les derniers termes de la deuxième et troisième somme s'unissent deux à deux de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &= (C_{2N+2}^1 \cdot k^{N+2} + 2k^{N+2}) + ((-1)^{N+1}2k + (-1)^{N+1}C_{2N+2}^{2N+1} \cdot k) \\ &= ((2N+2)k^{N+2} + 2k^{N+2}) + ((-1)^{N+1}2k + (-1)^{N+1}(2N+2) \cdot k) \\ &= (2N+4)k^{N+2} + (-1)^{N+1}(2N+4)k \\ &= C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + (-1)^{N+1}C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \end{aligned}$$

## Etape d'induction

Renumérotation des indices de la troisième somme :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( C_{2N+2}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + 2k^{N+2} + \sum_{p=1}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{N+1} 2k + \sum_{p=0}^{N-1} C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} \cdot k \right) \\
 &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^N 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^{p+1} k^{N+2-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \right)
 \end{aligned}$$

## Etape d'induction

Jonction des sommes :

$$\begin{aligned} &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N \left[ C_{2N+2}^{2p+1} + 2 \cdot C_{2N+2}^{2p} + C_{2N+2}^{2p-1} \right] (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left( C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+4}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+4}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} \end{aligned}$$

Ceci complète la récurrence pour  $v_2(P_n)$ .

## Etape d'induction

Nous avons démontré que

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ v_2(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \end{array} \right. \quad (5)$$

## Autre expression de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$

Grâce aux formules démontrées par récurrence, nous remarquons que l'on pourrait joindre  $v_1(P_n)$  et  $v_2(P_n)$  sous forme d'une unique somme à l'aide des nombres complexes.

$$v_1(P_n) + i \cdot \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}} = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} + i \cdot \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1/2-p} \right)$$

## Autre expression de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$

$$\begin{aligned} &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} i^{2p} \sqrt{k}^{2n+2-2p} + \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} i^{2p+1} \sqrt{k}^{2n+2-(2p+1)} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{2n+2} C_{2n+2}^p \sqrt{k}^{2n+2-p} i^p \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} (\sqrt{k} + i)^{2n+2} \quad (\text{Binôme de Newton}) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left( \sqrt{k+1} \exp \left( i \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) \right)^{2n+2} \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left( \sqrt{k+1} \exp \left( i \operatorname{arccotan} \left( \sqrt{k} \right) \right) \right)^{2n+2} \end{aligned}$$

## Autre expression de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$

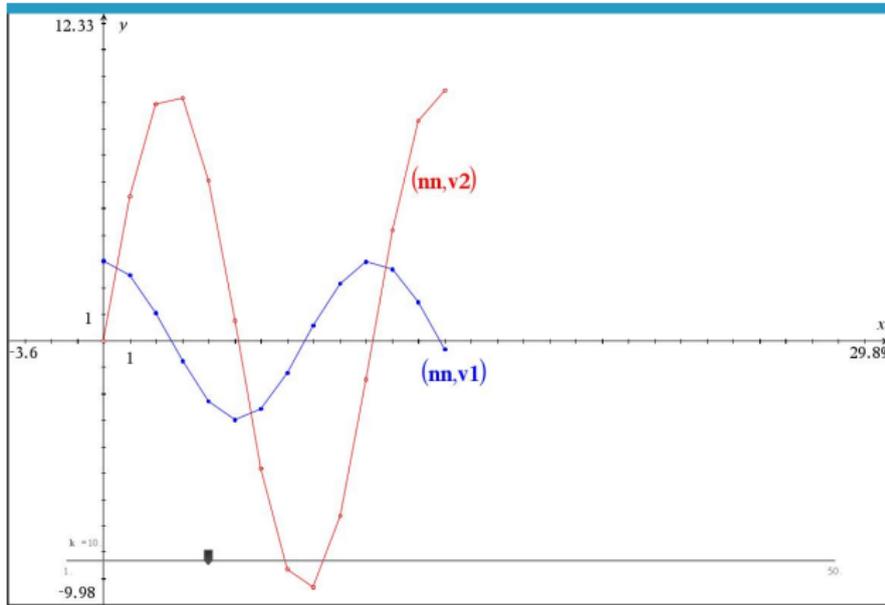
Comme  $k > 1$ ,  $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)$ .

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}} &= v_i \exp\left(i(2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)\right) \\ &= v_i \left( \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)\right) + i \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)\right) \right)\end{aligned}$$

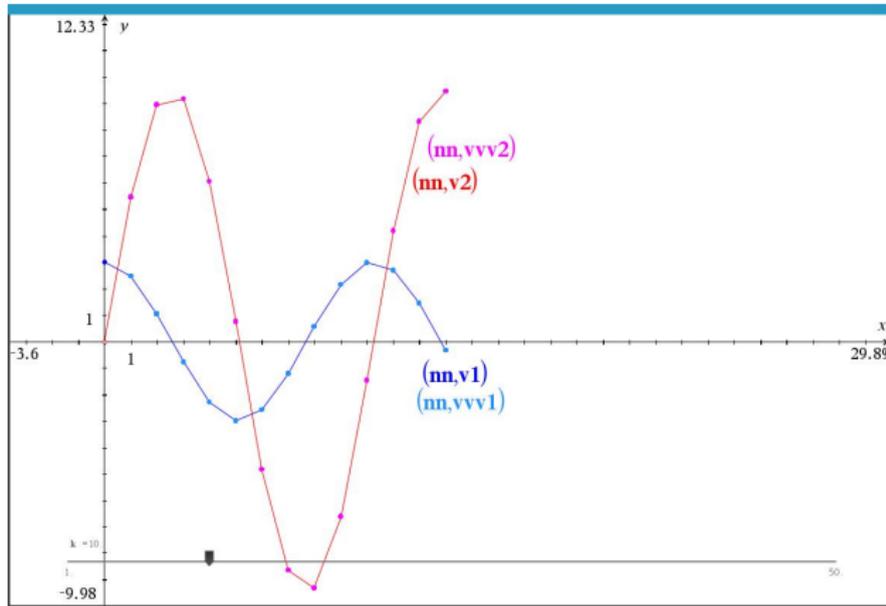
En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{cases} v_1(P_n) = v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)\right) \\ v_2(P_n) = v_i \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)\right) \end{cases}$$

## Vérification graphique



## Vérification graphique



## Recherche des zéros de $v_1(P_n)$ , $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

## Recherche des zéros de $v_1(P_n)$ , $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace  $S_1$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_1(P_n)$

## Recherche des zéros de $v_1(P_n)$ , $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace  $S_1$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_1(P_n)$
- la direction dans laquelle se déplace  $S_2$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_2(P_n)$

## Recherche des zéros de $v_1(P_n)$ , $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace  $S_1$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_1(P_n)$
- la direction dans laquelle se déplace  $S_2$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_2(P_n)$
- si  $S_2$  rattrape  $S_1$  lorsque  $v_1(P_n) < 0$ .  
→ Ce qui est déterminé par le signe et les racines de  $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

## Recherche des zéros de $v_1(P_n)$ , $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace  $S_1$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_1(P_n)$
- la direction dans laquelle se déplace  $S_2$ .  
→ Déterminée par le signe et les racines de  $v_2(P_n)$
- si  $S_2$  rattrape  $S_1$  lorsque  $v_1(P_n) < 0$ .  
→ Ce qui est déterminé par le signe et les racines de  $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

Ces valeurs formeront des intervalles.

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation  $v_1(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$v_1(P_n) = 0 \Leftrightarrow v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1.$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Réolvons l'équation  $v_1(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\ &\Leftrightarrow \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation  $v_1(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\&\Leftrightarrow \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow (2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{(2\ell+1)\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation  $v_1(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\&\Leftrightarrow \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow (2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{(2\ell+1)\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z} \\&\Leftrightarrow \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{2\ell+1}{4n+4} \cdot \pi\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation  $v_1(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\&\Leftrightarrow \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow (2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{(2\ell+1)\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z} \\&\Leftrightarrow \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{2\ell+1}{4n+4} \cdot \pi\end{aligned}$$

Vu l'ensemble des valeurs  $]0, \pi[$  de la fonction  $\operatorname{arccotan}$ , on doit avoir  $0 < \frac{2\ell+1}{4n+4} \cdot \pi < \pi$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

$$0 < \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi < \pi \Leftrightarrow 0 \leq \ell \leq 2n + 1$$

$$\operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} = \cot\left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi\right), \text{ avec } \cot\left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \ell \leq n.$$

$$\Leftrightarrow k = \cot^2\left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi\right) \quad \ell \in [0, 1, 2, \dots, n]$$

## Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation  $v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_2$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$v_2(P_n) = 0 \Leftrightarrow v_i \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1.$$

## Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation  $v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_2$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation  $v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_2$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation  $v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_2$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\&\Leftrightarrow \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow (2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \ell \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation  $v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_2$  s'immobilise à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0 &\Leftrightarrow v_i \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\&\Leftrightarrow \sqrt{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0 \\&\Leftrightarrow (2n+2) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \ell \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\&\Leftrightarrow \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

De par l'ensemble des valeurs de l'arccotangente, on doit avoir :

$$0 < \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2} < \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 < \ell < 2n+2 \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq 2n+1$$

Dès lors,

$$\operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} = \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\right), \text{ avec } \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq n+1.$$

$$\Leftrightarrow k = \cot^2\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\right) \quad \ell \in [1, 2, \dots, n+1]$$

## Forme polynomiale de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ &+ \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left( \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} + \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+3}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p}\end{aligned}$$

## Forme trigonométrique de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

Grâce à un artifice de calcul :

$$\begin{aligned} & \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} (\sqrt{k} + i)^{2n+2} \cdot (\sqrt{k} + i) \\ &= (v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}}) \cdot (\sqrt{k} + i) \\ &= \sqrt{k} v_1(P_n) - \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}} + i(v_1(P_n) + v_2(P_n)) \end{aligned}$$

## Forme trigonométrique de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

On remarque que

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) &= \Im\left(\frac{v_i}{(k+1)^{n+1}}(\sqrt{k} + i)^{2n+3}\right) \\ &= v_i\sqrt{k+1} \sin\left((2n+3)\operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right)\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

Résolvons enfin l'équation  $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  et  $S_2$  repartent avec des vitesses égales à la  $n^e$  phase.

$$v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0 \Leftrightarrow \sin\left((2n+3) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{k}\right)\right) = 0, \text{ où } k > 1.$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

Résolvons enfin l'équation  $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  et  $S_2$  repartent avec des vitesses égales à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0 &\Leftrightarrow \sin\left((2n+3) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\ &\Leftrightarrow (2n+3) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \ell \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

Résolvons enfin l'équation  $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$ . La solution indiquera la valeur de  $k$  pour laquelle  $S_1$  et  $S_2$  repartent avec des vitesses égales à la  $n^e$  phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0 &\Leftrightarrow \sin\left((2n+3) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k})\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\&\Leftrightarrow (2n+3) \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \ell \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\&\Leftrightarrow \operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\end{aligned}$$

## Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

De par l'ensemble des valeurs de l'arccotangente, on doit avoir :

$$0 < \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3} < \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 < \ell < 2n+3 \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq 2n+2$$

Dès lors,

$$\operatorname{arccotan}(\sqrt{k}) = \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} = \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\right), \text{ avec } \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq n+1.$$

$$\Leftrightarrow k = \cot^2\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\right) \quad \ell \in [1, 2, \dots, n+1]$$

## Factorisation de $v_1(P_n)$ , de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que  $v_1(P_n)$ ,  $v_2(P_n)$  et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

## Factorisation de $v_1(P_n)$ , de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que  $v_1(P_n)$ ,  $v_2(P_n)$  et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré  $n + 1$  en  $k$  ;

## Factorisation de $v_1(P_n)$ , de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que  $v_1(P_n)$ ,  $v_2(P_n)$  et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré  $n + 1$  en  $k$  ;
- le dénominateur est  $(k + 1)^{n+1}$ , strictement positif si  $k > 1$  ;

## Factorisation de $v_1(P_n)$ , de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que  $v_1(P_n)$ ,  $v_2(P_n)$  et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré  $n + 1$  en  $k$  ;
- le dénominateur est  $(k + 1)^{n+1}$ , strictement positif si  $k > 1$  ;
- $n + 1$  zéros différents du pôle ont été trouvés.

## Factorisation de $v_1(P_n)$ , de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Par conséquent, pour tout  $n$  naturel, nous pouvons écrire en vertu du théorème fondamental de l'algèbre :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \cdot \prod_{\ell=0}^n \left( k - \cot^2 \left( \frac{2 \cdot \ell + 1}{4n+4} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_n) = \frac{(2n+2)v_i}{(k+1)^{n+1}} \cdot \prod_{\ell=1}^{n+1} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2} \right) \right) \\ v_1(P_n) + v_2(P_n) = \frac{(2n+3)v_i}{(k+1)^{n+1}} \cdot \prod_{\ell=1}^{n+1} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3} \right) \right) \end{array} \right.$$

## Valeurs-pivot de l'étude phase par phase

Pour faciliter l'étude des phases en fonction des valeurs-pivot que nous avons calculées, soient :

## Valeurs-pivot de l'étude phase par phase

Pour faciliter l'étude des phases en fonction des valeurs-pivot que nous avons calculées, soient :

- $c_n$  la plus grande valeur annulant  $v_1(P_n)$ , c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right)$$

- $r_n$  la plus grande valeur annulant  $v_2(P_n)$ , c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)$$

- $s_n$  la plus grande valeur annulant  $v_1(P_n) + v_2(P_n)$ , c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2n+3}\right)$$

## Retour à l'étude phase par phase ; phase $P_0$

Avec tous ces apports théoriques, résumons l'étude des chocs phase par phase.

Comme déjà vu :

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} \cdot v_i \end{cases} \quad (6)$$

Donc à la phase  $P_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  se dirigent vers le mur :  $v_1(P_0)$  et  $v_2(P_0)$  sont positifs.

## Phase $P_1$ (formule)

Pour la phase  $P_1$ , on a :

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} \cdot \left(k - \cot^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \left(k - \cot^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \\ v_2(P_1) = \frac{4v_i}{(k+1)^2} \cdot \left(k - \cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(k - \cot^2\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right) \\ v_1(P_1) + v_2(P_1) = \frac{5v_i}{(k+1)^2} \cdot \left(k - \cot^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \left(k - \cot^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) \end{cases}$$

Dans ce cas,  $c_1 = \cot^2(\pi/8)$ ,  $s_1 = \cot^2(\pi/5)$  ; et  
 $r_1 = \cot^2(\pi/4) = 1$  (à rejeter car on ne considère que  $k > 1$ ).

## Phase $P_1$ (étude de signe)

L'étude du signe de chacune des expressions donne le tableau suivant.

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

Notons que les autres zéros sont inférieurs à 1.

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si  $k \in ]r_1, s_1[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si  $k \in ]r_1, s_1[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_1$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

$k$		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si  $k \in ]r_1, s_1[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_1$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_1, c_1[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si  $k \in ]r_1, s_1[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_1$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_1, c_1[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = c_1$ , alors  $S_1$  s'immobilise ;

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si  $k \in ]r_1, s_1[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_1$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_1, c_1[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = c_1$ , alors  $S_1$  s'immobilise ;
- si  $k > c_1$ , alors  $S_1$  continue sa trajectoire vers le mur.

## Phase $P_1$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		$r_1$		$s_1$		$c_1$	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si  $k \in ]r_1, s_1[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_1$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_1, c_1[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = c_1$ , alors  $S_1$  s'immobilise ;
- si  $k > c_1$ , alors  $S_1$  continue sa trajectoire vers le mur.

Dans les trois derniers cas, il y a encore un choc !

## Phase $P_2$ (formule)

Etudions uniquement l'intervalle  $]s_1, c_1[$ . Pour la phase  $P_2$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} \cdot \prod_{\ell=0}^2 \left( k - \cot^2 \left( \frac{2 \cdot \ell + 1}{12} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_2) = \frac{6v_i}{(k+1)^3} \cdot \prod_{\ell=1}^3 \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{6} \right) \right) \\ v_1(P_2) + v_2(P_2) = \frac{7v_i}{(k+1)^3} \cdot \prod_{\ell=1}^3 \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{7} \right) \right) \end{array} \right.$$

Dans ce cas,  $c_2 = \cot^2 \left( \frac{\pi}{12} \right)$ ,  $s_2 = \cot^2 \left( \frac{\pi}{7} \right)$  et  $r_2 = \cot^2 \left( \frac{\pi}{6} \right)$ .

## Phase $P_2$ (étude de signe)

L'étude du signe de chacune des expressions donne le tableau suivant.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

Notons que les autres zéros sont inférieurs à 1.

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

- Si  $k \in ]s_1, r_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

- Si  $k \in ]s_1, r_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_2$ , alors  $S_2$  s'immobilise et  $S_1$  repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

- Si  $k \in ]s_1, r_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_2$ , alors  $S_2$  s'immobilise et  $S_1$  repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si  $k \in ]r_2, s_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

- Si  $k \in ]s_1, r_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_2$ , alors  $S_2$  s'immobilise et  $S_1$  repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si  $k \in ]r_2, s_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_2$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

- Si  $k \in ]s_1, r_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_2$ , alors  $S_2$  s'immobilise et  $S_1$  repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si  $k \in ]r_2, s_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_2$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_2, c_1[$ , alors  $S_1$  repart en direction opposée au mur plus lentement que  $S_2$ .

## Phase $P_2$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

$k$		$s_1$		$r_2$		$s_2$		$c_1$	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

- Si  $k \in ]s_1, r_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_2$ , alors  $S_2$  s'immobilise et  $S_1$  repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si  $k \in ]r_2, s_2[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_2$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_2, c_1[$ , alors  $S_1$  repart en direction opposée au mur plus lentement que  $S_2$ .

**Dans le dernier cas, il y a encore un choc !**

## Phase $P_3$ (formule)

Etudions uniquement l'intervalle  $]s_2, c_1[$ . Pour la phase  $P_3$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} \cdot \prod_{\ell=0}^3 \left( k - \cot^2 \left( \frac{2 \cdot \ell + 1}{16} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_3) = \frac{8v_i}{(k+1)^4} \cdot \prod_{\ell=1}^4 \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{8} \right) \right) \\ v_1(P_3) + v_2(P_3) = \frac{9v_i}{(k+1)^4} \cdot \prod_{\ell=1}^4 \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{9} \right) \right) \end{array} \right.$$

## Phase $P_3$ (étude de signe)

Remarquons que dans l'intervalle  $]s_2, c_1[$ , il n'y a plus de valeurs-pivot propres à la phase  $P_3$ .

En effet, on a :

$k$		$s_2$		$c_1$		$r_3$	
$v_1(P_3)$	/	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_3)$	/	-	-	-	-	0	/
$v_1(P_3) + v_2(P_3)$	/	-	-	-	-	-	/

## Phase $P_3$ (conclusion)

On conclut que si  $k \in ]s_2, c_1[$ , alors il y a un dernier choc entre  $S_1$  et  $S_2$ .

L'étude de l'intervalle  $]1, c_1]$  est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



## Phase $P_3$ (conclusion)

On conclut que si  $k \in ]s_2, c_1[$ , alors il y a un dernier choc entre  $S_1$  et  $S_2$ .

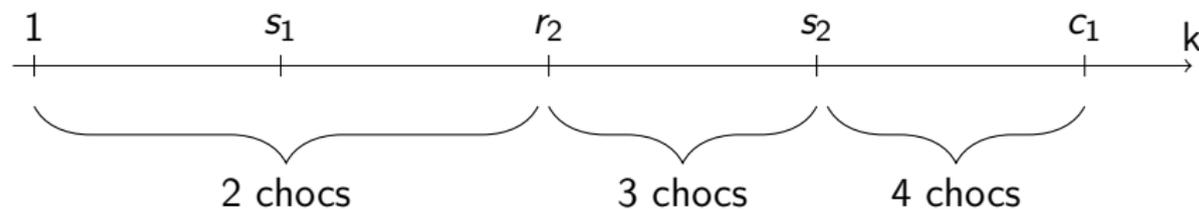
L'étude de l'intervalle  $]1, c_1]$  est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



## Phase $P_3$ (conclusion)

On conclut que si  $k \in ]s_2, c_1[$ , alors il y a un dernier choc entre  $S_1$  et  $S_2$ .

L'étude de l'intervalle  $]1, c_1[$  est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



## Généralisation par induction

Démontrons par récurrence que tout intervalle  $]c_{n-1}; c_n]$ , où  $n$  est un naturel non nul, se décompose somme suit.



Ces valeurs-pivot sont associées aux phases  $P_{2n-2}$ ,  $P_{2n-1}$ ,  $P_{2n}$ ,  $P_{2n+1}$ . Le cas de base vient d'être considéré.

En supposant l'assertion vraie pour  $n = N$ , démontrons-la pour  $n = N + 1$ . Cela veut dire que l'on étudiera l'intervalle  $]c_N; c_{N+1}]$ .

## Phase $P_{2N+1}$ (formule)

Pour la phase  $P_{2N+1}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+1}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+2}} \cdot \prod_{\ell=0}^{2N+1} \left( k - \cot^2 \left( \frac{2 \cdot \ell + 1}{8N+8} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+1}) = \frac{(4N+4)v_i}{(k+1)^{2N+2}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+2} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{4N+4} \right) \right) \\ v_1(P_{2N+1}) + v_2(P_{2N+1}) = \frac{(4N+5)v_i}{(k+1)^{2N+2}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+2} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{4N+5} \right) \right) \end{array} \right.$$

Notons que  $c_N = \cot^2 \left( \frac{\pi}{4N+4} \right) = \cot^2 \left( \frac{\pi}{2(2N+1)+2} \right) = r_{2N+1}$

## Phase $P_{2N+1}$ (étude de signe)

$k$		$r_{2N+1} = c_N$		$s_{2N+1}$		$c_{N+1}$	
$v_1(P_{2N+1})$	/	/	-	-	-	-	/
$v_2(P_{2N+1})$	/	/	+	+	+	+	/
$v_1(P_{2N+1}) + v_2(P_{2N+1})$	/	/	-	0	+	+	/

## Phase $P_{2N+1}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

## Phase $P_{2N+1}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si  $k \in ]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_{2N+1}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si  $k \in ]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_{2N+1}$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;

## Phase $P_{2N+1}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si  $k \in ]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_{2N+1}$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_{2N+1}, c_{N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$  dans la direction opposée au mur.

## Phase $P_{2N+1}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si  $k \in ]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_{2N+1}$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_{2N+1}, c_{N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$  dans la direction opposée au mur.

**Dans le dernier cas, il y a encore un choc !**

## Phase $P_{2N+2}$ (formule)

Pour la phase  $P_{2N+2}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+2}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+3}} \cdot \prod_{\ell=0}^{2N+2} \left( k - \cot^2 \left( \frac{2 \cdot \ell + 1}{8N + 12} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+2}) = \frac{(4N+6)v_i}{(k+1)^{2N+3}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+3} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{4N+6} \right) \right) \\ v_1(P_{2N+2}) + v_2(P_{2N+2}) = \frac{(4N+7)v_i}{(k+1)^{2N+3}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+3} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{4N+7} \right) \right) \end{array} \right.$$

## Phase $P_{2N+2}$ (étude de signe)

$k$	$s_{2N+1}$		$r_{2N+2}$		$s_{2N+2}$		$c_{N+1}$	
$v_1(P_{2N+2})$	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_{2N+2})$	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_{2N+2}) + v_2(P_{2N+2})$	-	-	-	-	0	+	+	/

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si  $k \in ]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si  $k \in ]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_{2N+2}$ , alors  $S_2$  s'immobilise ;

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si  $k \in ]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_{2N+2}$ , alors  $S_2$  s'immobilise ;
- si  $k \in ]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si  $k \in ]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_{2N+2}$ , alors  $S_2$  s'immobilise ;
- si  $k \in ]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_{2N+2}$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent avec des vitesses égales ;

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si  $k \in ]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_{2N+2}$ , alors  $S_2$  s'immobilise ;
- si  $k \in ]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_{2N+2}$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_{2N+2}, c_{N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$ .

## Phase $P_{2N+2}$ (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si  $k \in ]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = r_{2N+2}$ , alors  $S_2$  s'immobilise ;
- si  $k \in ]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$ , alors  $S_1$  repart plus vite que  $S_2$  dans la direction opposée au mur ;
- si  $k = s_{2N+2}$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  repartent avec des vitesses égales ;
- si  $k \in ]s_{2N+2}, c_{N+1}[$ , alors  $S_1$  repart plus lentement que  $S_2$ .

**Dans le dernier cas, il y a un nouveau choc !**

## Phase $P_{2N+3}$ (formule)

Pour la phase  $P_{2N+3}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+3}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+4}} \cdot \prod_{\ell=0}^{2N+3} \left( k - \cot^2 \left( \frac{2 \cdot \ell + 1}{8N + 16} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+3}) = \frac{(4N+8)v_i}{(k+1)^{2N+4}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+4} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{4N+8} \right) \right) \\ v_1(P_{2N+3}) + v_2(P_{2N+3}) = \frac{(4N+9)v_i}{(k+1)^{2N+4}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+4} \left( k - \cot^2 \left( \frac{\ell \cdot \pi}{4N+9} \right) \right) \end{array} \right.$$

## Phase $P_{2N+3}$ (étude de signe)

Remarquons que dans l'intervalle  $]s_{2N+2}, c_{N+1}[$ , il n'y a plus de valeurs-pivot propres à la phase  $P_{2N+3}$ .

En effet, on a :

$k$		$s_{2N+2}$		$c_{N+1}$		$r_{2N+3}$	
$v_1(P_{2N+3})$	/	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_{2N+3})$	/	-	-	-	-	0	/
$v_1(P_{2N+3}) + v_2(P_{2N+3})$	/	-	-	-	-	-	/

Ceci conclut la récurrence.

## Résumé

Les différentes valeurs de  $c_n$ ,  $r_n$  et  $s_n$  sont des valeurs-pivot formant des intervalles. Aussi, il est important de noter que

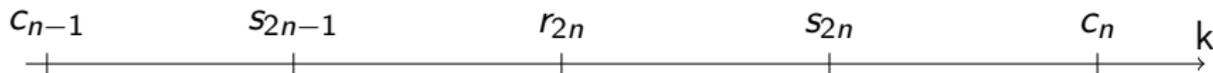
$$c_n = \cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)+2}\right) = r_{2n+1}$$

## Résumé

Les différentes valeurs de  $c_n$ ,  $r_n$  et  $s_n$  sont des valeurs-pivot formant des intervalles. Aussi, il est important de noter que

$$c_n = \cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)+2}\right) = r_{2n+1}$$

On peut généraliser chaque intervalle  $]c_{n-1}; c_n]$  auquel  $k$  peut appartenir de la manière suivante :

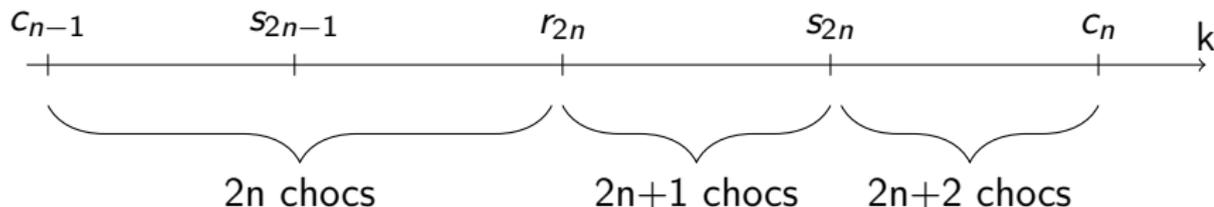


## Résumé

Les différentes valeurs de  $c_n$ ,  $r_n$  et  $s_n$  sont des valeurs-pivot formant des intervalles. Aussi, il est important de noter que

$$c_n = \cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)+2}\right) = r_{2n+1}$$

On peut généraliser chaque intervalle  $]c_{n-1}; c_n]$  auquel  $k$  peut appartenir de la manière suivante :



## Généralisation finale des résultats selon $k$

valeur de $k$	$v_1$	$v_2$
$c_{n-1}$	$v_1(P_{2n-1}) = -v_i$	$v_2(P_{2n-1}) = 0$
$c_{n-1} < k < s_{2n-1}$	$ v_1(P_{2n-1})  >  v_2(P_{2n-1}) $	$v_2(P_{2n-1}) > 0$
$s_{2n-1}$	$ v_1(P_{2n-1})  =  v_2(P_{2n-1}) $	$v_2(P_{2n-1}) > 0$
$s_{2n-1} < k < r_{2n}$	$ v_1(P_{2n-1})  >  v_2(P_{2n-1}) $	$v_2(P_{2n-1}) < 0$
$r_{2n}$	$v_1(P_{2n}) = -v_i$	$v_2(P_{2n}) = 0$
$r_{2n} < k < s_{2n}$	$ v_1(P_{2n})  >  v_2(P_{2n}) $	$v_2(P_{2n}) > 0$
$s_{2n}$	$ v_1(P_{2n})  =  v_2(P_{2n}) $	$v_2(P_{2n}) > 0$
$s_{2n} < k < c_n$	$ v_1(P_{2n+1})  >  v_2(P_{2n+1}) $	$v_2(P_{2n+1}) < 0$
$c_n$	$v_1(P_{2n+1}) = -v_i$	$v_2(P_{2n+1}) = 0$

## Remerciements

Merci pour votre écoute.

Nous remercions notre professeur de mathématiques M.Haine ainsi que Mme Sutera, Mme Moitroux et Mme Germain pour nous avoir assistés tout au long de notre recherche et le chercheur de l'ULiège M.Leroy pour ses suggestions.