50e congrès de la SBPMef

Mathématiques mystérieuses – 21 août 2025

Entre sable et papier

Laure Ninove

GEM

Haute École Léonard de Vinci

UCLouvain


Tas de sable

Un tas de sable difforme

Un tas de sable en forme de joli cône, si on s'y prend bien

Un tas de grains de maïs, un peu plus aplati

L’angle de talus

L'angle de talus

L'angle de talus

- est à peu près fixe pour un matériau donné,

L’angle de talus

L’angle de talus

- est à peu près fixe pour un matériau donné,

- dépend du matériau (type de sable, grains, etc.),

L'angle de talus

L'angle de talus

- est à peu près fixe pour un matériau donné,

- dépend du matériau (type de sable, grains, etc.),

- ne dépend pas de la taille du tas.

Un tas de sable sur un socle circulaire

Si on verse du sable sur un socle circulaire,

- on obtient un cône,
- avec le même angle de talus qu'avant,
- sans devoir viser :
  il suffit de mettre autant de sable qu'on peut (veut),
  l'excédent tombe.

Un tas de sable sur un socle carré

Et si le socle est carré ?

Un tas de sable sur un socle carré

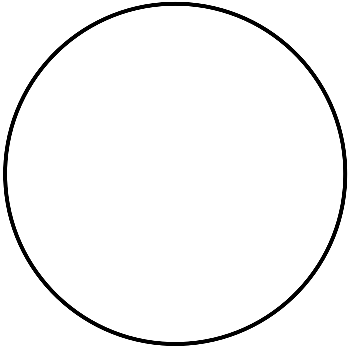
Et si le socle est carré ?

Si on verse du sable sur un socle carré,

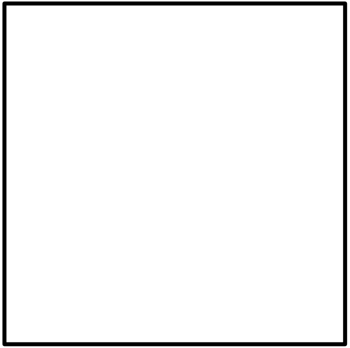
- on obtient une pyramide,
- avec le même angle de talus qu'avant.

Le tas de sable vu de haut

Sur un socle circulaire

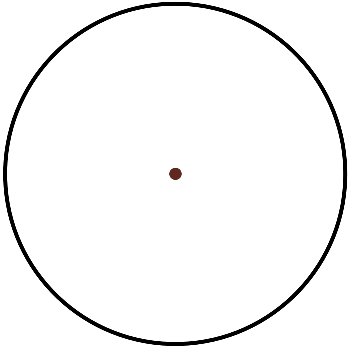


Sur un socle carré

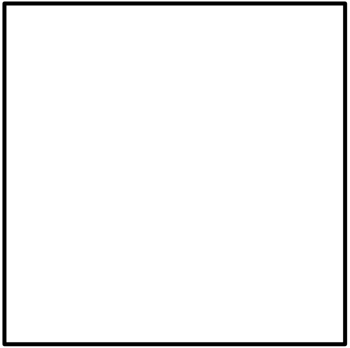


Le tas de sable vu de haut

Sur un socle circulaire

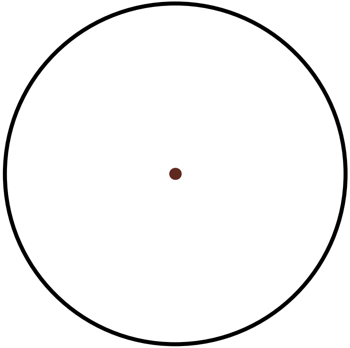


Sur un socle carré

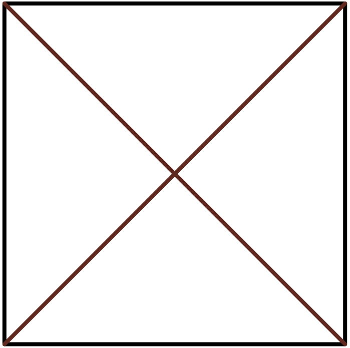


Le tas de sable vu de haut

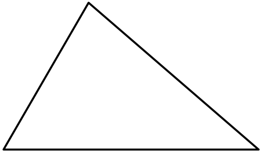
Sur un socle circulaire



Sur un socle carré



Et si on changeait la forme du socle ?



Quelle vue du dessus ?

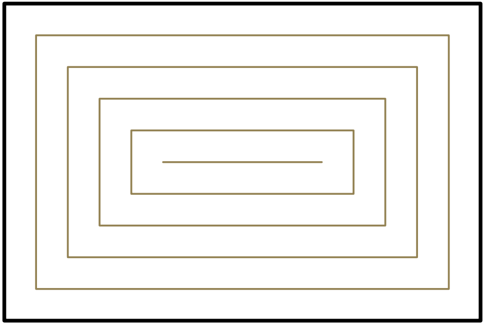
✏️ Esquissez votre conjecture sur votre feuille de route.

La crête vue du dessus pour un socle rectangulaire

Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.

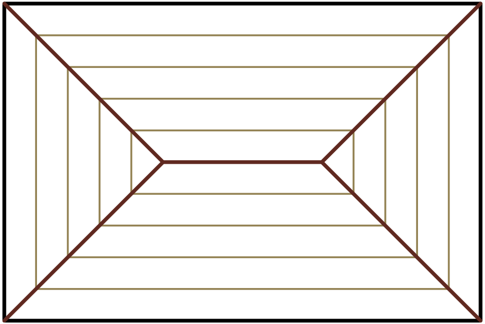
La crête vue du dessus pour un socle rectangulaire



Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.
- Lignes de niveau.

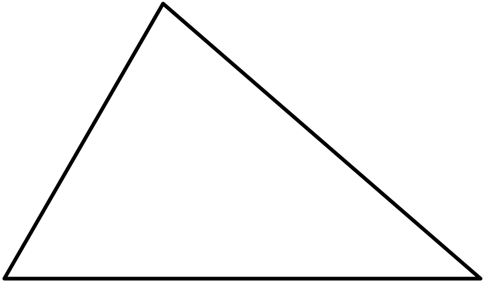
La crête vue du dessus pour un socle rectangulaire



Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.
- Lignes de niveau.

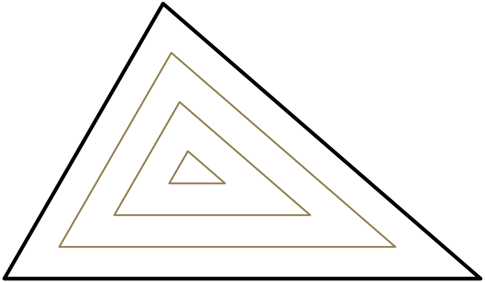
La crête vue du dessus pour un socle triangulaire



Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.

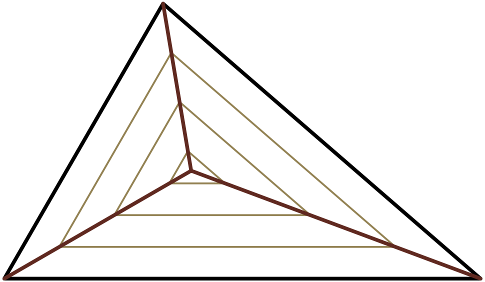
La crête vue du dessus pour un socle triangulaire



Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.
- Lignes de niveau.

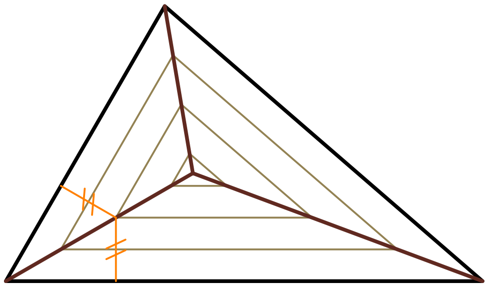
La crête vue du dessus pour un socle triangulaire



Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.
- Lignes de niveau.
- Bissectrices.

La crête vue du dessus pour un socle triangulaire

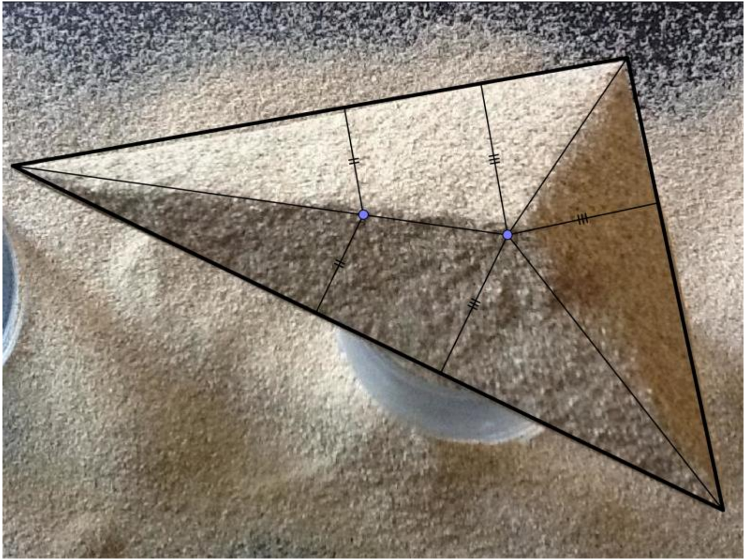


Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.
- Lignes de niveau.
- Bissectrices.
- Égale distance aux bords.
- Plus court chemin.

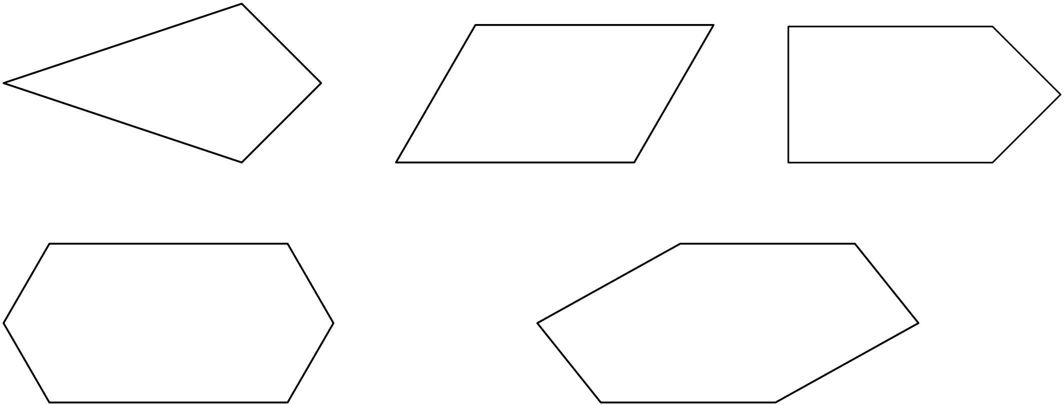
La crête vue du dessus pour un socle triangulaire

La crête vue du dessus pour un socle triangulaire



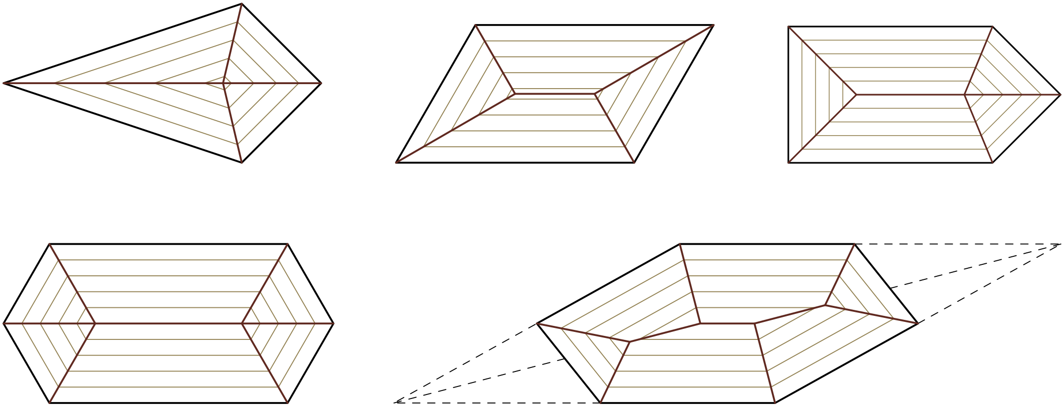
Trouver la forme de la crête vue du dessus pour quelques polygones convexes

✏️ Esquissez la forme des crêtes en vue du dessus pour ces socles sur votre feuille de route.

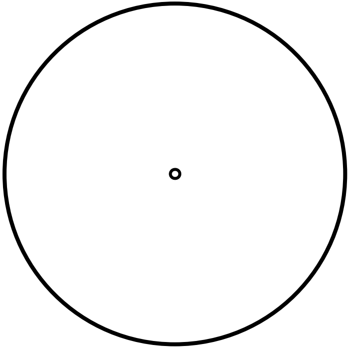


Trouver la forme de la crête vue du dessus pour quelques polygones convexes

✏️ Esquissez la forme des crêtes en vue du dessus pour ces socles sur votre feuille de route.



La crête vue du dessus pour un socle circulaire troué en son centre

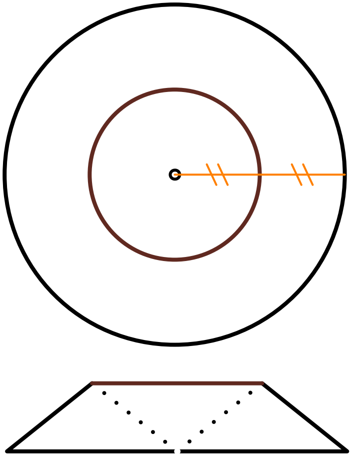


On a troué le socle circulaire en son centre.

Quelle est la vue du dessus du tas de sable ?

✏️ Esquissez-la sur votre feuille de route.

La crête vue du dessus pour un socle circulaire troué en son centre

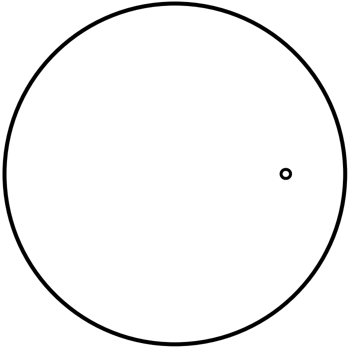


La crête vue du dessus est un cercle de rayon moitié.

Idée(s) clé(s) :

- Angle de talus constant.
- Égale distance aux bords.
- Plus court chemin.

La crête vue du dessus pour un socle circulaire troué en dehors de son centre

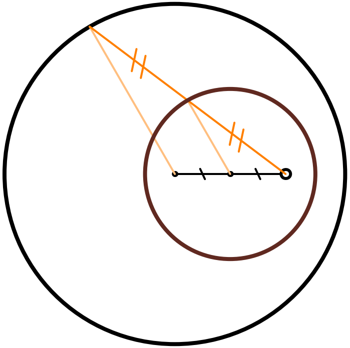


On a fait un trou *décentré* dans le socle circulaire.

Quelle est la vue du dessus du tas de sable ?

✏️ Esquissez-la sur votre feuille de route.

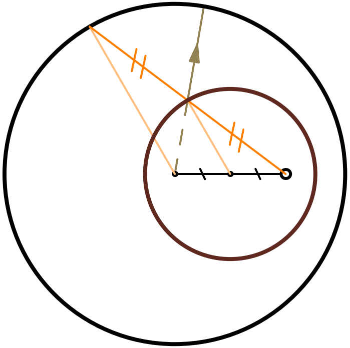
La crête vue du dessus pour un socle circulaire troué en dehors de son centre



Un cercle décentré ?

La crête vue du dessus serait-elle un cercle de rayon moitié centré à mi-chemin entre le centre du socle et le trou ?

La crête vue du dessus pour un socle circulaire troué en dehors de son centre



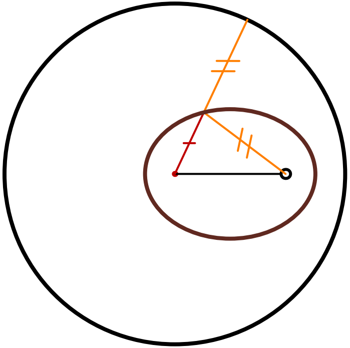
Un cercle décentré ?

La crête vue du dessus serait-elle un cercle de rayon moitié centré à mi-chemin entre le centre du socle et le trou ?

Cette intuition est **fausse** !
Un grain de sable roulant vers le bord du socle doit se déplacer selon une génératrice du cône.

Et l'expérience avec le sable semble suggérer une crête en forme d'ellipse plutôt qu'en forme de cercle…

La crête vue du dessus pour un socle circulaire troué en dehors de son centre

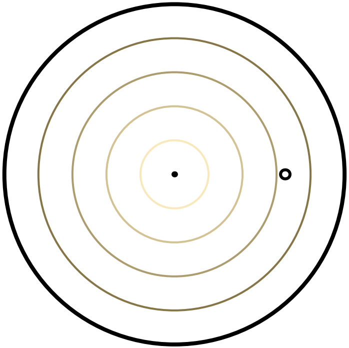


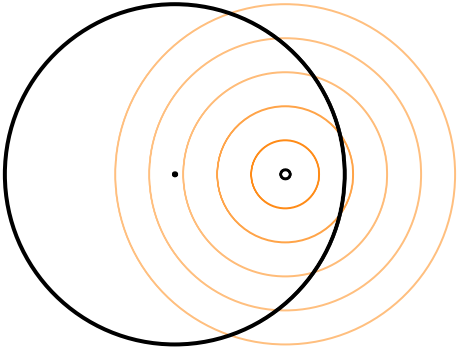
La crête vue du dessus est le lieu des points dont la somme des distances au centre du socle circulaire et au trou est constante et vaut le rayon du socle circulaire.

C'est une ellipse !

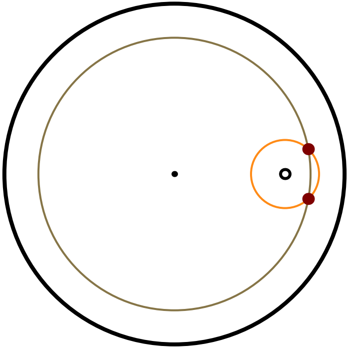
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

On aurait aussi pu construire cette ellipse point par point
à partir de l'intersection de lignes de niveaux,
les unes partant du bord du socle, les autres du trou.

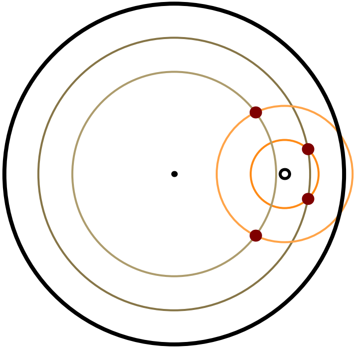




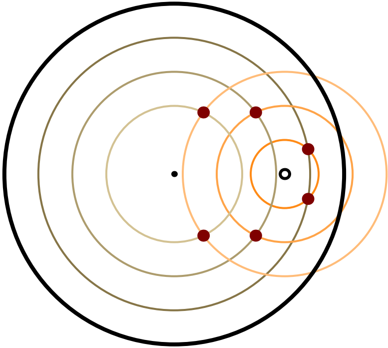
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau



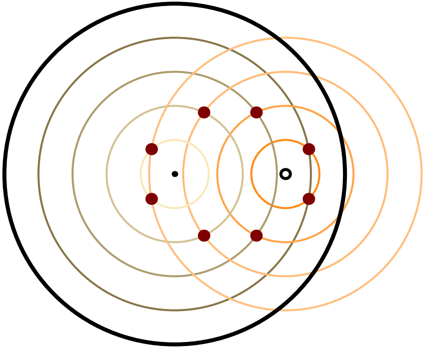
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau



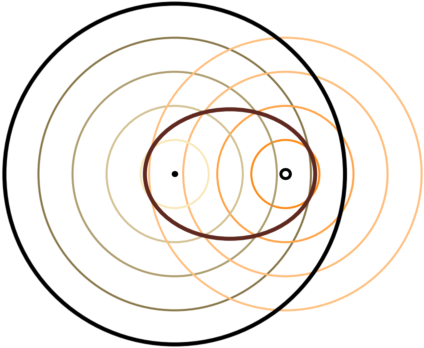
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau



Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

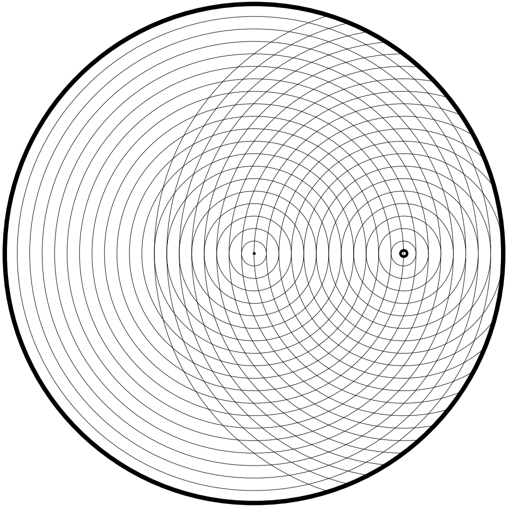


Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau



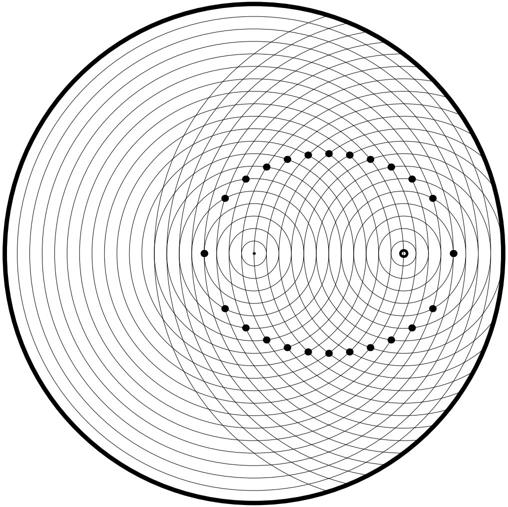
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

✏️ À vous de jouer !

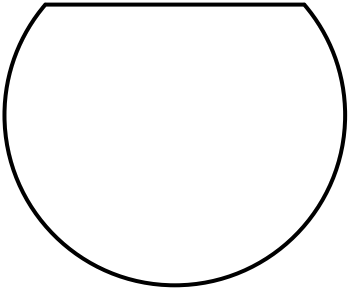


Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

✏️ À vous de jouer !



La crête vue du dessus pour un socle circulaire tronqué

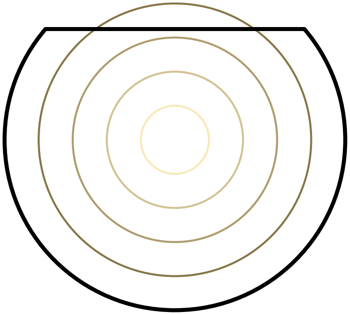


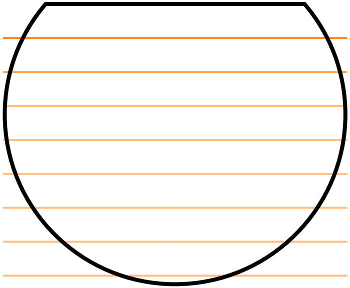
On a tronqué un socle circulaire selon une droite.

Quelle est la vue du dessus du tas de sable ?

Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

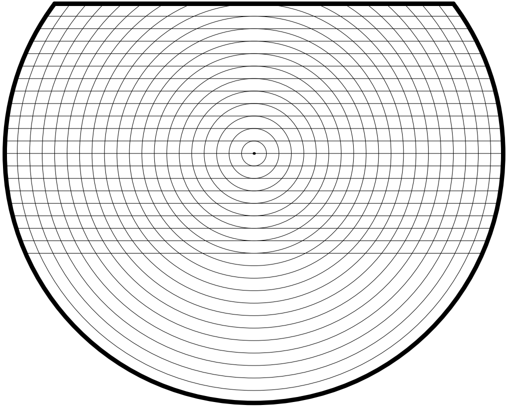
On peut explorer à partir de deux familles de lignes de niveau.





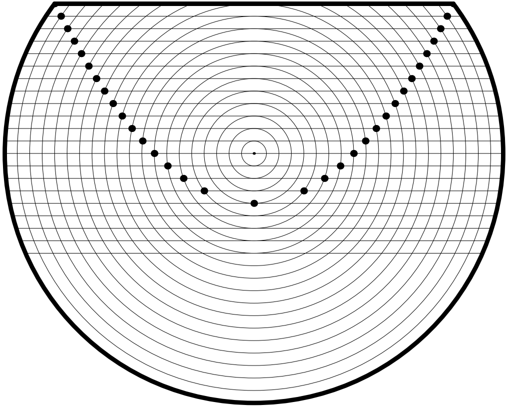
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

✏️ À vous de jouer !



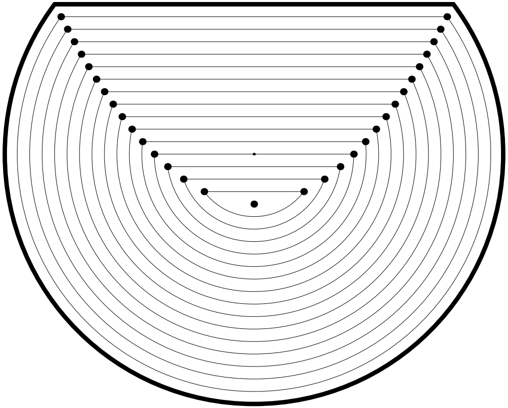
Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

✏️ À vous de jouer !

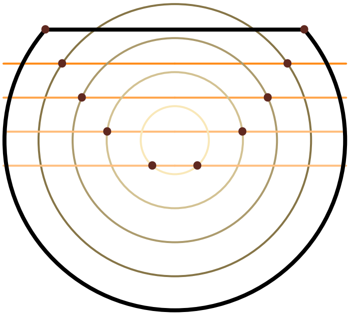


Construire la vue du dessus de la crête à l'aide de lignes de niveau

✏️ À vous de jouer !



La crête vue du dessus pour un socle circulaire tronqué

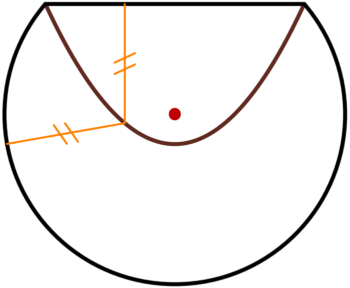


La crête vue du dessus semble être un tronçon de parabole.

Cela semble confirmé par l'expérience avec le sable.

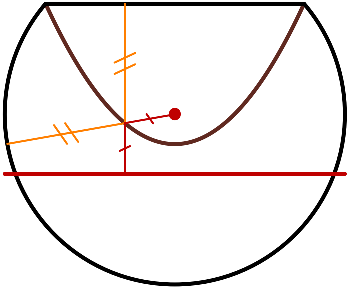
Comment le justifier ?

Un socle circulaire tronqué : lieu de points



La crête vue du dessus est le lieu des points équidistants au bord du socle circulaire et au segment qui tronque le disque.

Un socle circulaire tronqué : lieu de points



La crête vue du dessus est le lieu des points équidistants au bord du socle circulaire et au segment qui tronque le disque.

On peut voir que c'est aussi le lieu des points équidistants au centre du socle circulaire et à une droite.

C'est une parabole !

Petit retour à la situation tridimensionnelle

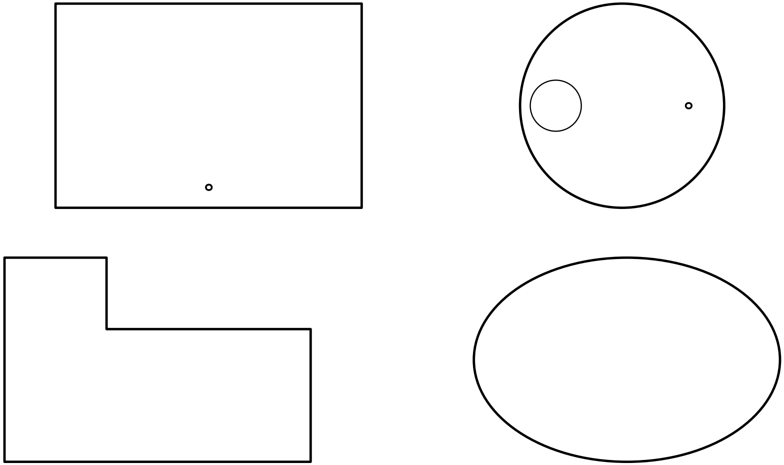
On aurait aussi pu voir la situation comme l'intersection du cône d'origine et du plan passant par le segment qui tronque le disque et avec le bon angle de talus.

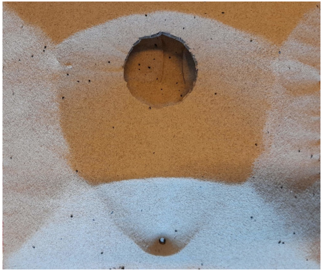
L'intersection d'un cône et d'un plan de même angle d'inclinaison que l'angle d'ouverture du cône est une parabole.

Mais ici, on montre que la crête elle-même a une forme de parabole, alors qu'avant on s'intéressait à sa vue du dessus !

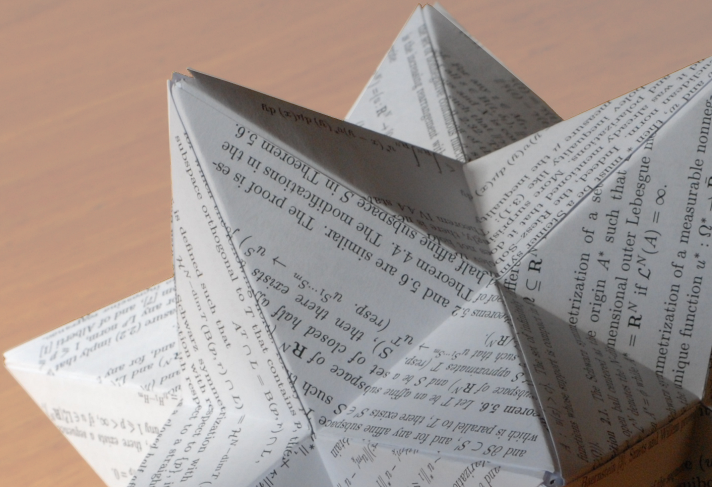
D’autres socles à explorer

- Si le cœur vous en dit, il y a plein de socles à explorer !

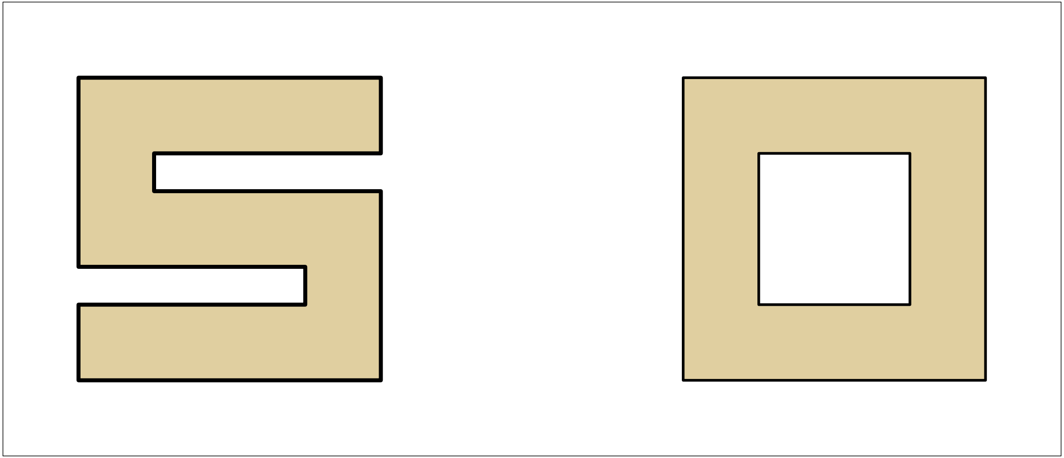




Pliages et découpages

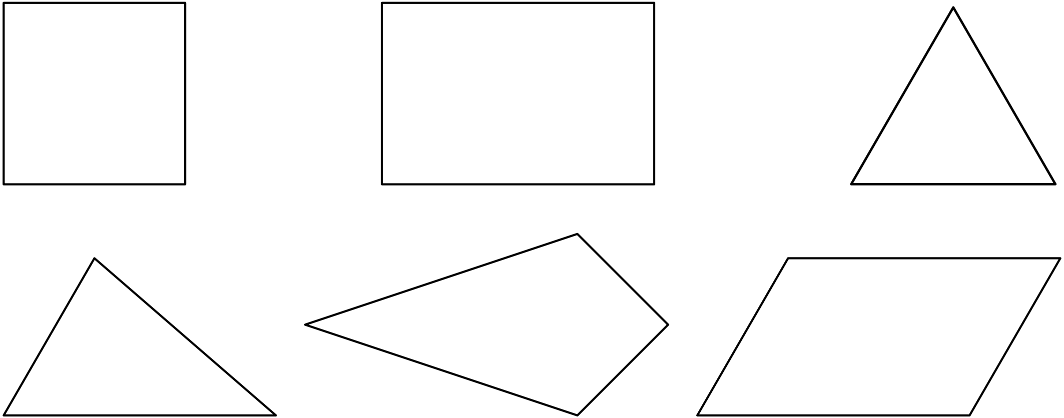


Double anniversaire : 50e congrès et 50e OMB !

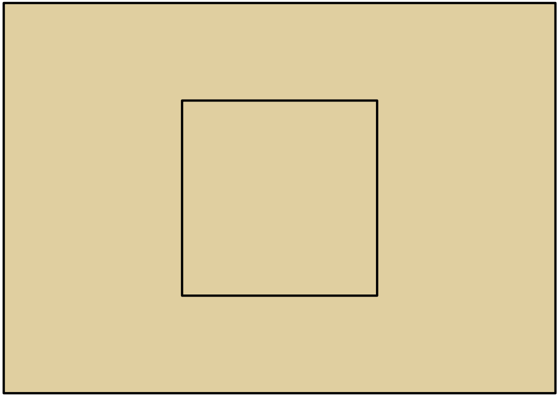


En un coup de ciseaux

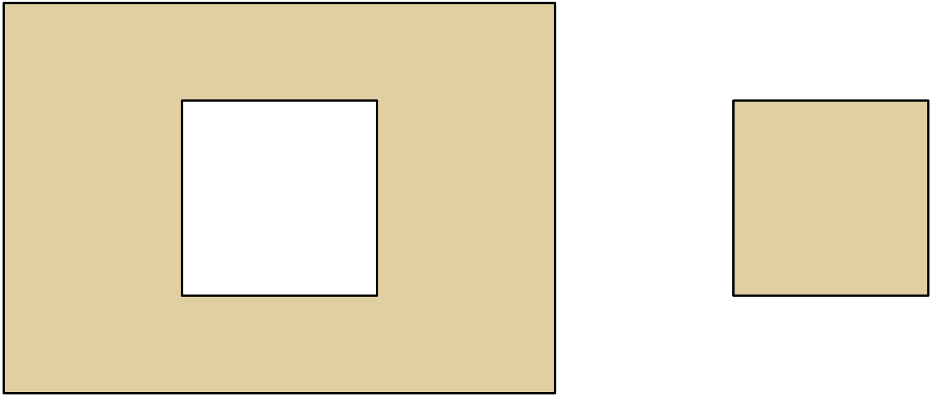
✂️ À vous de jouer ! Détachez chaque forme du papier en un coup de ciseaux !



Des figures simples en un coup de ciseaux

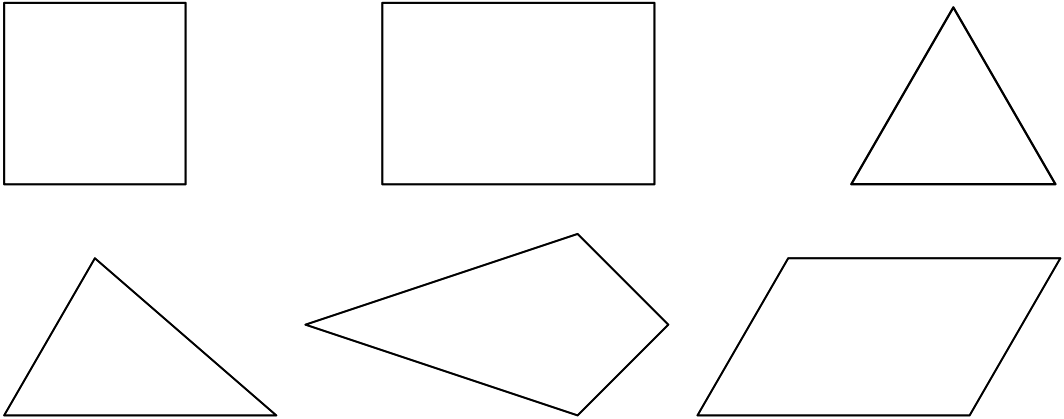


Des figures simples en un coup de ciseaux



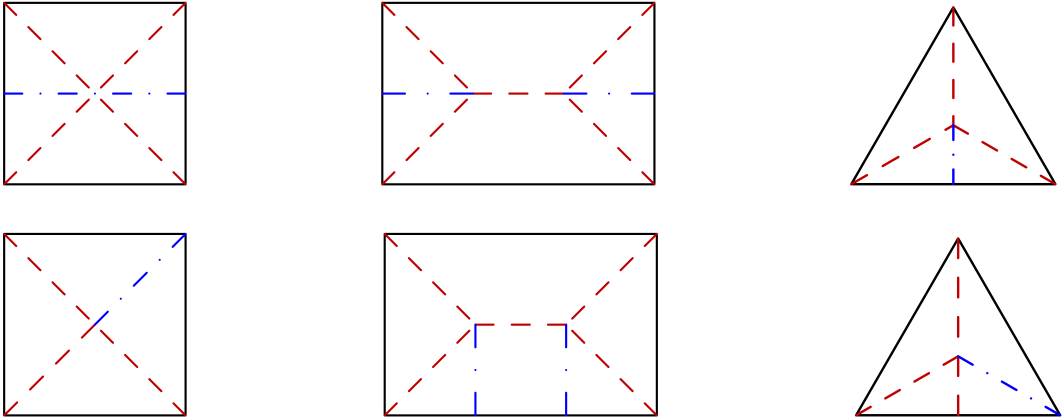
En un coup de ciseaux

✂️ À vous de jouer ! Détachez chaque forme du papier en un coup de ciseaux !

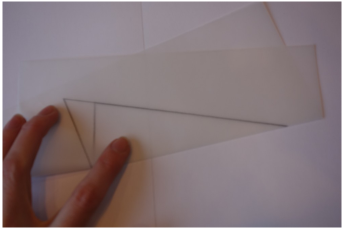


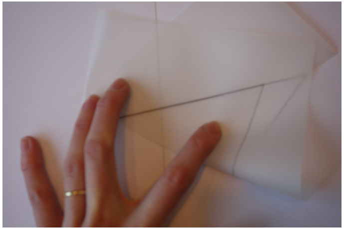
Des figures simples en un coup de ciseaux

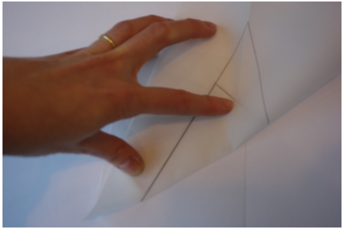
✂️ À vous de jouer ! Détachez chaque forme du papier en un coup de ciseaux !

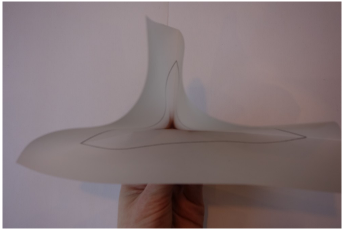


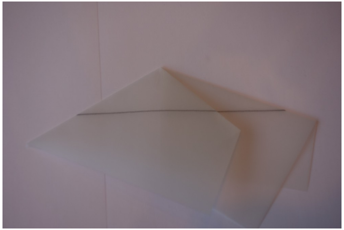
Un triangle en un coup de ciseaux

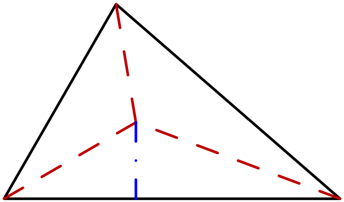




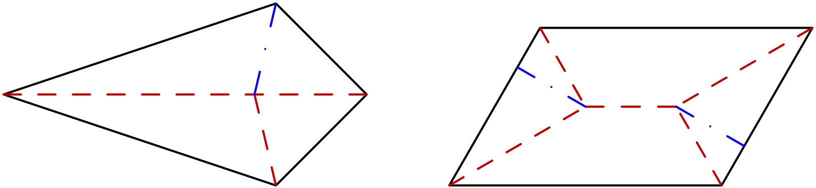






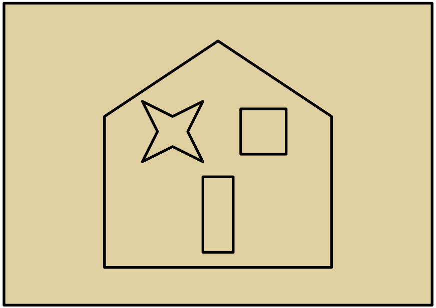


Un cerf-volant et un parallélogramme en un coup de ciseaux



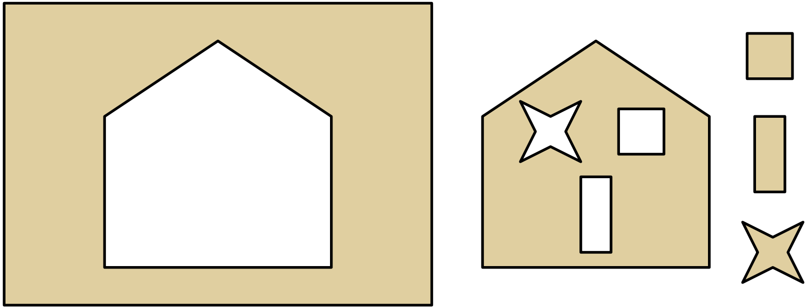
Le « fold and one cut problem »

Étant donnés des polygones dessinés sur une feuille de papier,
peut-on plier la feuille de papier de manière à découper ces polygones, via une seule coupe rectiligne ?



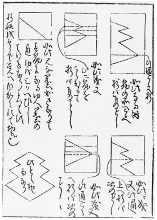
Le « fold and one cut problem »

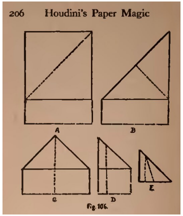
Étant donnés des polygones dessinés sur une feuille de papier,
peut-on plier la feuille de papier de manière à découper ces polygones, via une seule coupe rectiligne ?



Le « fold and one cut problem »

- Première mention d'un problème de ce type au Japon
  Ouvrage *Wakoku Chiyekurabe*, par Kan Chu Sen, 1721
- Légende de Betsy Ross et du drapeau américain en 1777
  Harper's New Monthly Magazine, vol. 47, nº 278, 1873
  Peinture *Betsy Ross 1777*, par J.L.G. Ferris, 1920
- Tours de magie, notamment par Houdini
  Ouvrage *Houdini's Paper Magic*, par Houdini, 1922





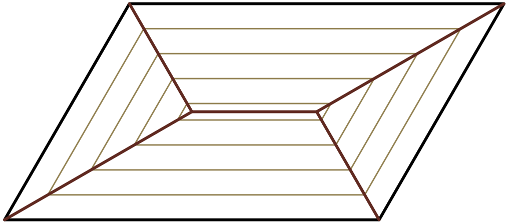
Le « fold and one cut problem »

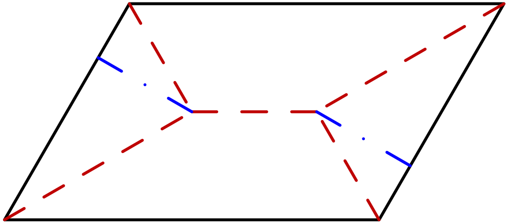
Fold and One-Cut Theorem (E. Demaine, M. Demaine and A. Lubiw, 1999)

Le problème du « fold and one cut » admet (au moins) une solution pour tout ensemble de polygones et de lignes brisées.

Et des algorithmes existent pour réaliser le pliage !

Quand le sable rencontre le papier…



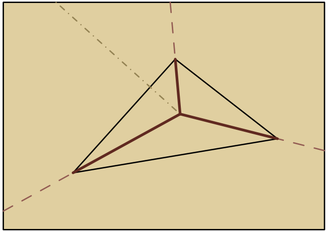


Quand le sable rencontre le papier…

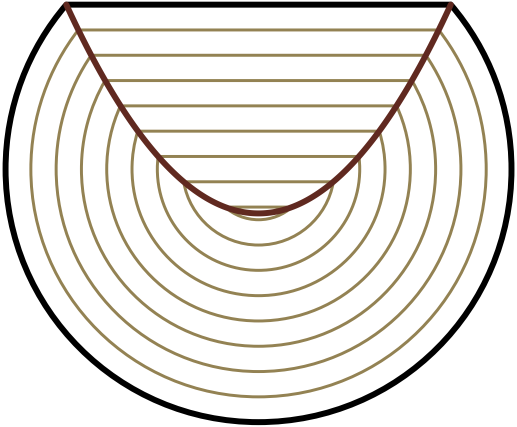
Pour des polygones convexes,
les lignes de crêtes des tas de sable correspondent aux plis principaux du Fold and One-Cut.

Les crêtes et les plis ont pour support

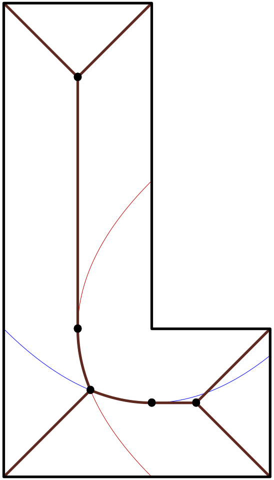
- des bissectrices à des paires de côtés non parallèles du bord, et
- des parallèles équidistantes à des paires de côtés parallèles du bord.

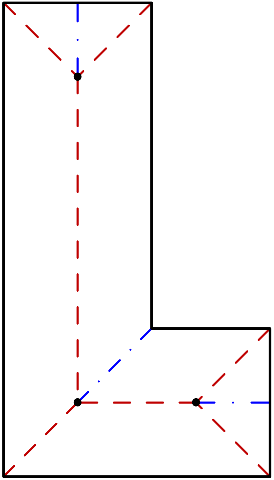


Quand le sable rencontre le papier… ou presque…

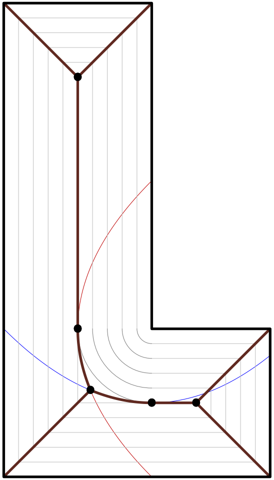


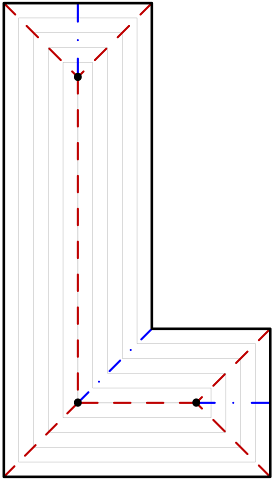
Quand le sable rencontre le papier… ou presque…



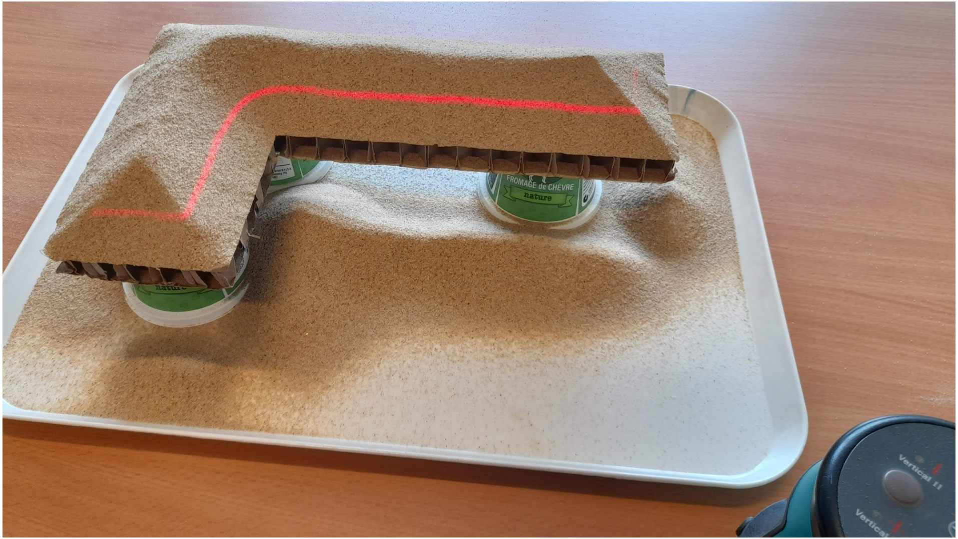


Quand le sable rencontre le papier… ou presque…

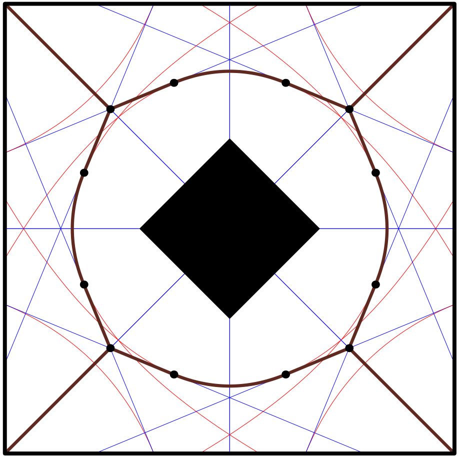


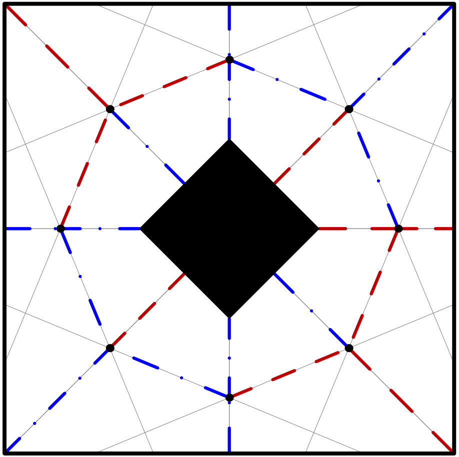


Quand le sable rencontre le papier… ou presque…

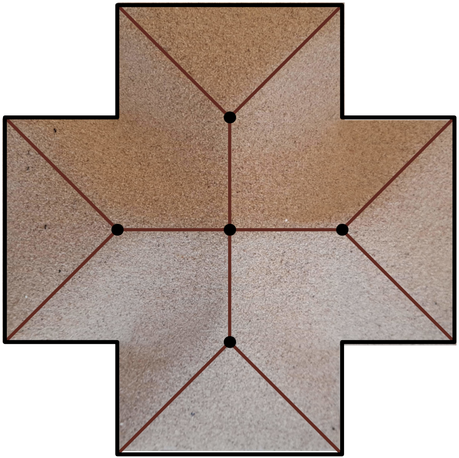


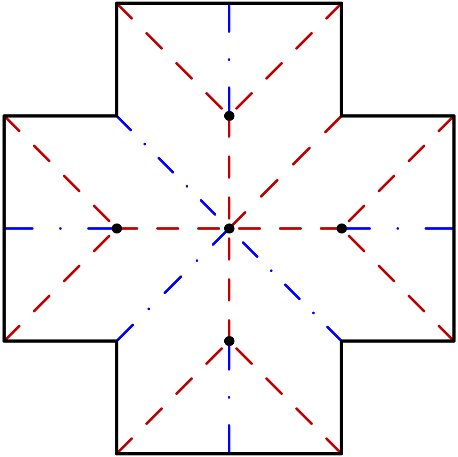
Quand le sable rencontre le papier… ou presque…

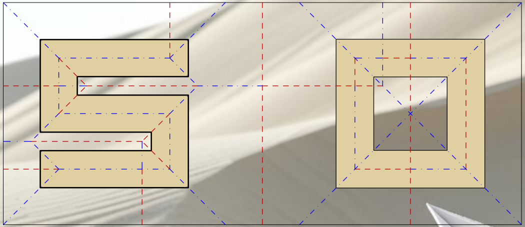




Quand le sable rencontre le papier… ou presque…







Mathématiques mystérieuses

Merci de votre attention !
Des questions ?

Aller plus loin avec les tas de sable et le Fold and One-Cut

Pour aller plus loin sur les tas de sable :

- Th. Gilbert, Tas de sable sur une ellipse, in : Th. Gilbert, L. Ninove (dir.) et le GEM, *Le plaisir de chercher en mathématiques*, Presses Universitaires de Louvain, 2017.
- P. Pierson, *La géométrie des tas de sable*, Travail de fin d'études, Haute École Galilée, 2012.
- Élèves des collèges Vieux colombier (Le Mans) et Vieux Chêne, *La géométrie du tas de sable*, MATh.en.JEANS, année 2008-2009, `http://soleil.rene.free.fr/neo/Butinages/La_geometrie_du_tas_de_sable.pdf`
- Matemateca, *Sandpiles*, University of São Paulo, `https://matemateca.ime.usp.br/acervo/montanhas_areia_ingles.html`

Pour aller plus loin sur le Fold and One-Cut :

- E. Demaine, *Erik Demaine's Folding and Unfolding : The Fold-and-Cut Problem*, `http://erikdemaine.org/foldcut/`
- J. O. Rourke, *How to fold it*, Cambridge University Press, 2011.
- L. Ninove, *Le problème du "fold and one-cut" dans le cas d'un triangle*, `https://origamimaths.blogspot.com/2017/02/fold-and-one-cut-triangle.html`.

Remerciements et crédits photos

Merci à Thérèse Gilbert et Pierre Pierson, du GEM,
pour les documents transmis ainsi que le matériel.

Crédits photos :

- Image de page de titre générée avec Canva.com
- Andrew Dunn (`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sand_sorting_tower.jpg`)
- Aflafla1 (`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cornpiled2017.jpg`)
- Captain Sprite (`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Angleofrepose.png`)
- Kan Chu Sen (Erik Demaine's webpage – `https://erikdemaine.org/foldcut/sen_book.html`)
- Jean Gerome Leon Ferris (`https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:Betsy_Ross_1777_cph.3g09905.jpg`)
- Houdini (`https://en.wikisource.org/wiki/Page:Houdini_-_Paper_Magic.djvu/219`)
- Pierre Pierson, *La géométrie des tas de sable*, Travail de fin d'études, Haute École Galilée, 2012.
- Thérèse Gilbert, *Lieux géométriques et coniques*, Cours LMAT2320, 2021.
- Laure Ninove