

L'informatique et la géométrie cachées dans l'enveloppe

J.-M. Desbonnez & P. Tilleuil

Congrès SBPMef, Binche 2025

Guest stars



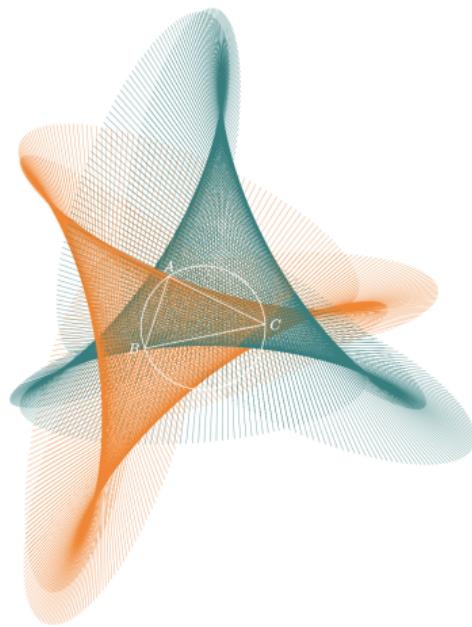


3.1415

Congrès de la SBPMef
Athénée Royal
Place des Droits de l'Homme, 16
7130 BINCHE

Heu non, pas ce genre d'enveloppe !

Plutôt ce genre-là !



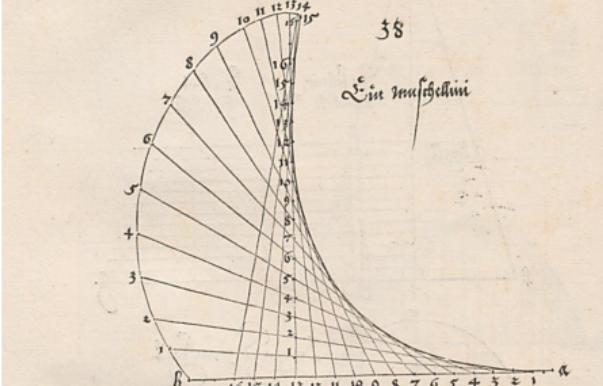
- Étude des enveloppes de certaines familles de droites dépendant d'un paramètre
- Défi graphique : situations géométriques simples, mais figures impossibles à réaliser « manuellement »
- Solution informatique : l'extension **tkz-euclide** sous **L^AT_EX**
- Résultats de géométrie étudiés dans le courant du XIX^e siècle, mais malheureusement perdus de vue de nos jours
- On parlera de leur signification et de leur histoire
- Dans le passé, peu d'illustrations à cause des difficultés techniques
- Images rares, voire inexistantes dans la littérature

I. La galerie des belles

Quelques enveloppes historiques

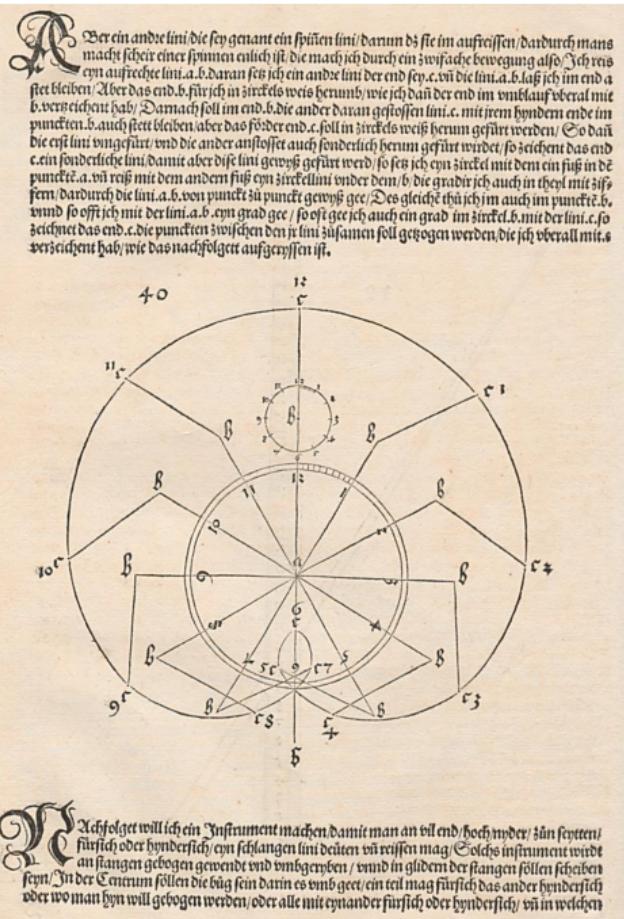
Une enveloppe (très) artistique

und der puncten, 16 ein trum eingetrichet vor bloß. Damach ses ich ein aufrechte lini/auf die zweich lini.a.b.in den puncten, 12 so lang die zweich lini.a.16.ist/ vnd punctur sie auch mit diesen zalen / vnd sei von vnde ich verloß. Damach nun ein richschiede vñ sich darauf die leng.a.b. und ses das mit dem ein end/ auf die zweich lini.a.b.in den puncten, 12 vnd leg es in der aufrechten in den puncten, 12 vnd wo das ander end des richschiede bin trut/ da ses ich auch ein punctum, 1. Damach leg ich das richschied mit dem ein end auf die zweich lini.a.b.in den puncten, 12 und erhebs an der aufrechten lisi in den puncten, 12 wo das ander end des richschiede hinterst/ daby ses ich auch ein puncten, 2. Also thüch ich durch die ganze hal der zweich und aufrechten lini/ bis das ich im durchschieden ja 16 zahn kom. Damach seich ich diese muschellini vom punct zu punct/ wie ich dann hic vnde hab aufzysffen/diese lini ist in mancherley wio zu verbergen.



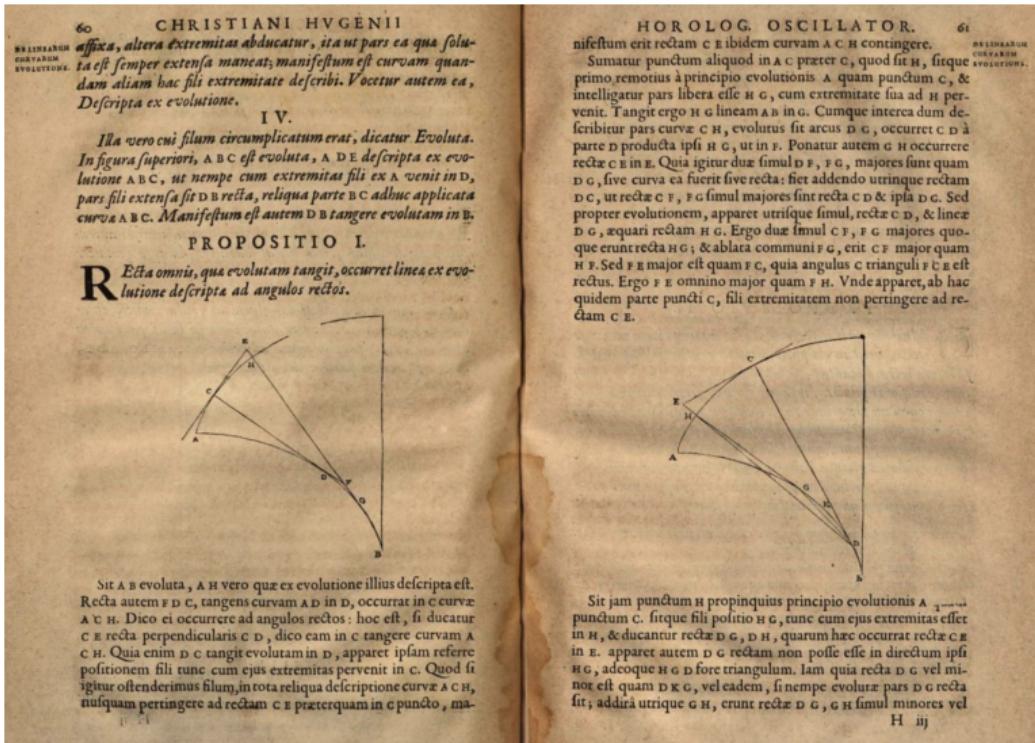
Diefer egemachen lini mag man ein werkzeug zu richten/ damit man sie machen kan let chiglich nemlich alfo/ Mach ein viercket holz/ so lang du sein bedarf vñ zweich/ des anfang ses von a. binden.b. daran stoss oben ein tiefe niet/ das etwas darin bin und her gesurt miug werden/ vnd theg das holz mit punct und zalen in vo vil icyl du willt/ vnd heb die sal bei den a. an. Damach mach in der mitt an spitzer festen dieser zweich laden/ zwey aufrechte darne richschiede sein/ so lang das zweich hole oder lade ist/ vnd das sie eng bei einander stan/ vnd punctur sie gleich mit der sal als das zweich holz oder die lade punctur ist/ vñ heb die sal vnde an. Damach mach ein seins lengsten/ so lang oder kurz du das habe will/ vñ mach jn zähndest ein vmlaufer relein/ das in die mitt der niet in der zweich laden a.b. gerecht ses dannes bin vnd her geen miug. Damach schreib das lenslein zwischen die zwey richschieden a.b. gerecht ses dannes bin vnd her geen miug. Damach schreib das lenslein in die mitt des zweich holz gegen den test. b. vñ ses das binden oder vnde mit dem relein in die mitt des zweich holz gegen den a. in den erste puncten, 12 leg das lenslein zwisch den holzen auch nider in den vndesel puncten, 12 und wasil du das mit dem relein vnde gegen dem richschiede setzt/ wi jo weyst du hinein sesil/ so weyst far allweig mit dem lenslein zwisch den richschiede sein vñersich/ bis das du vnde mit dem relein durch die zwey richschieden vnd gar ans end kumst/

Il savait ça ?!?



A. Dürer
(1471-1528)

Tout peut se développer !

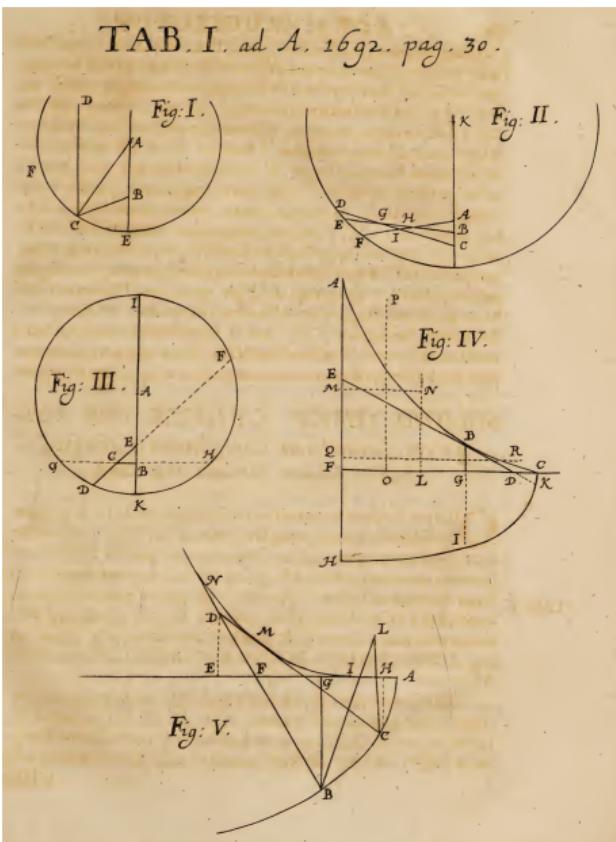


C. Huygens (1629-1695)

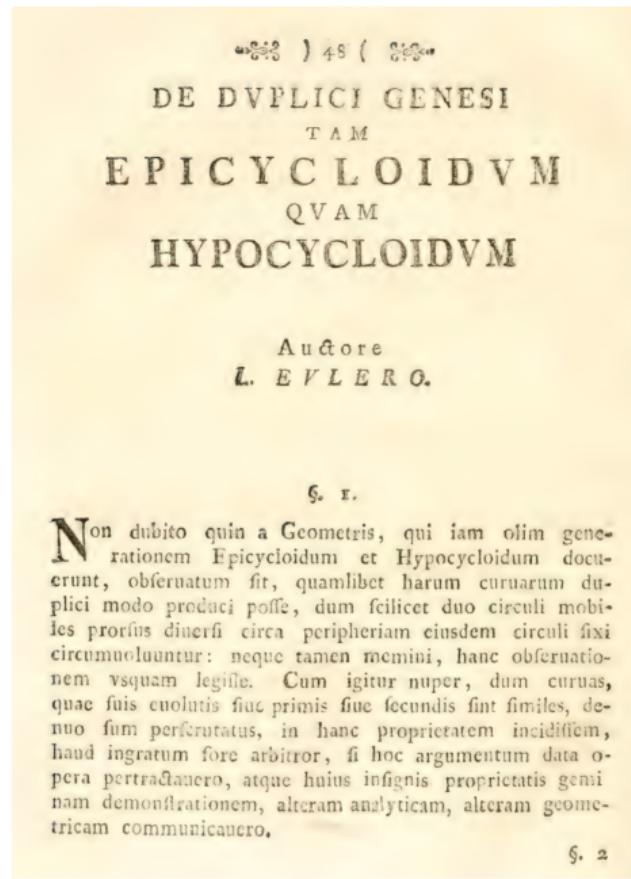
TAB. I. ad A. 1692. pag. 30.

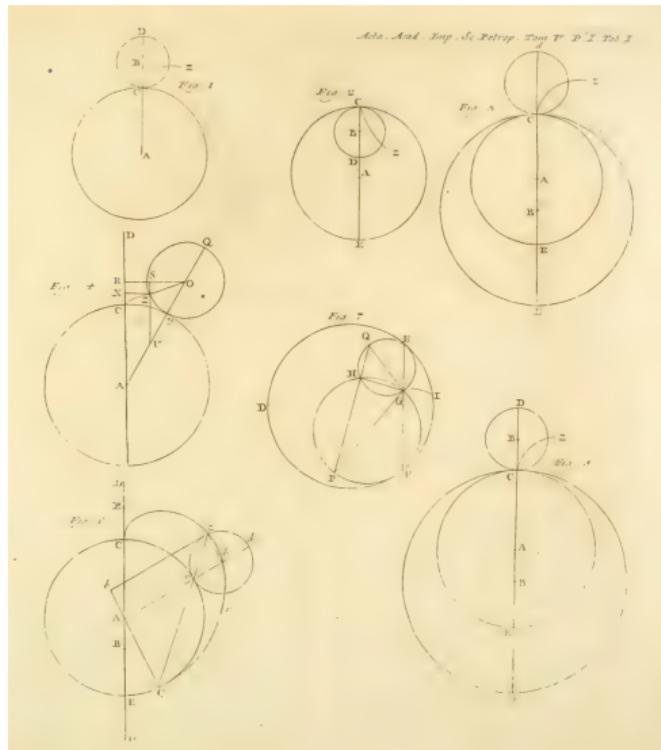
Une caustique ...

... est-ce une enveloppe ?

J. Bernoulli
(1667-1748)

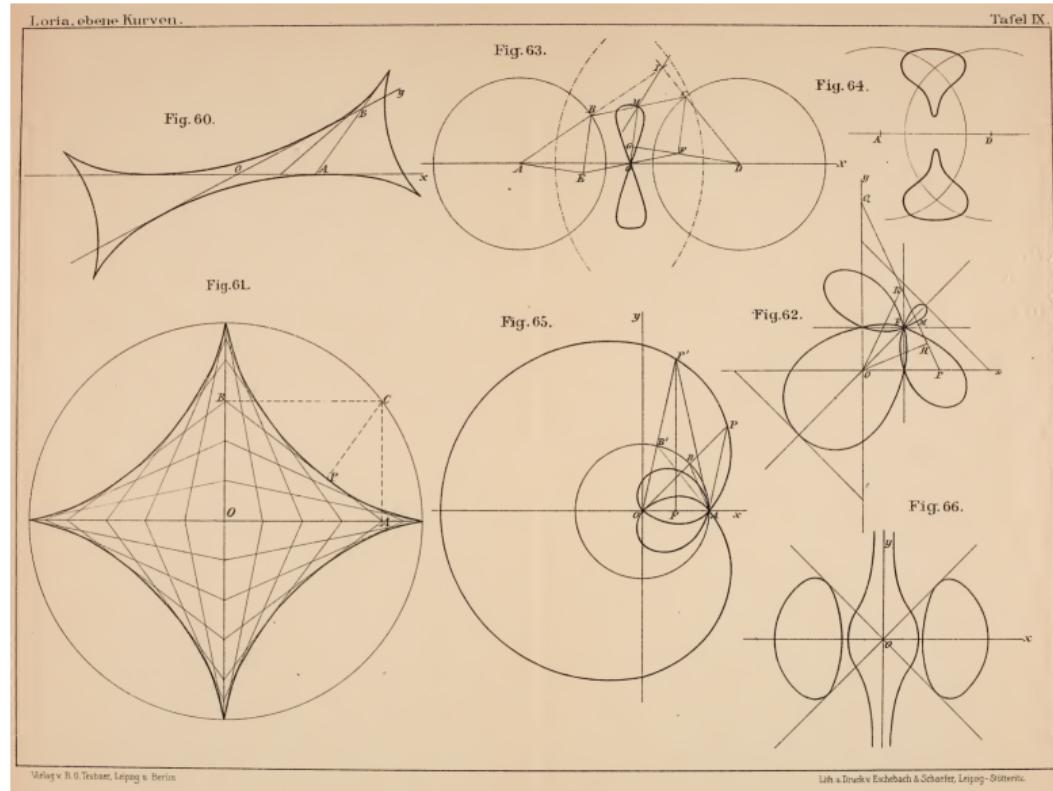
On aimeraient voir ...





L. Euler (1707-1783)

Un classique.



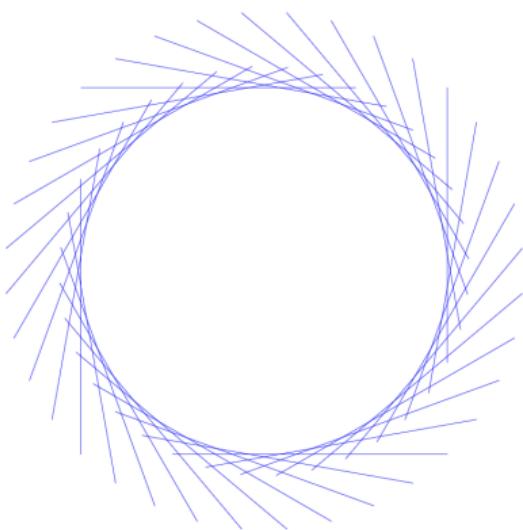
G. Loria
(1862-1954)

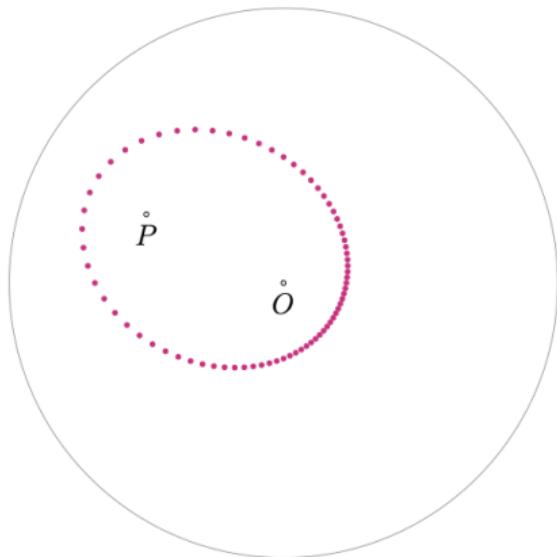
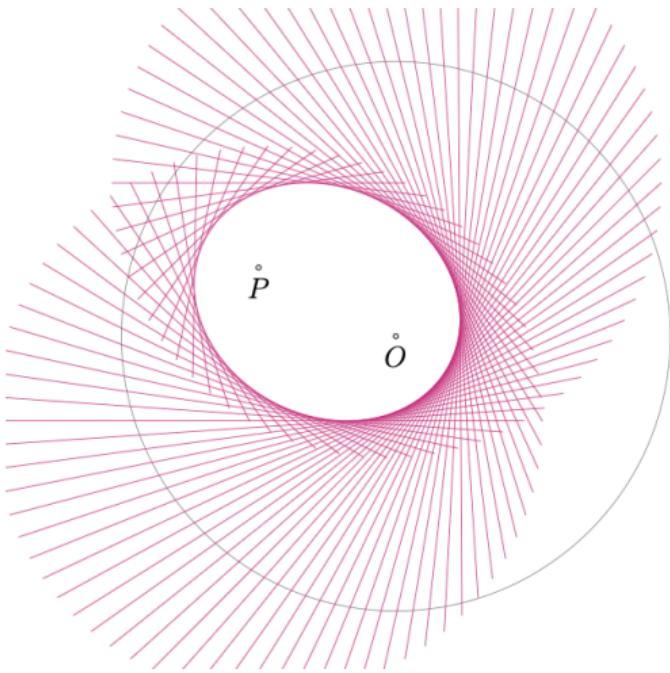
Fig. 14

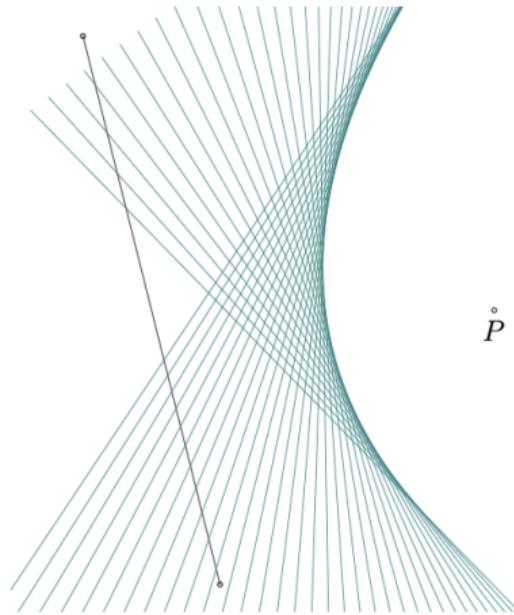
Extraordinaire ... ?

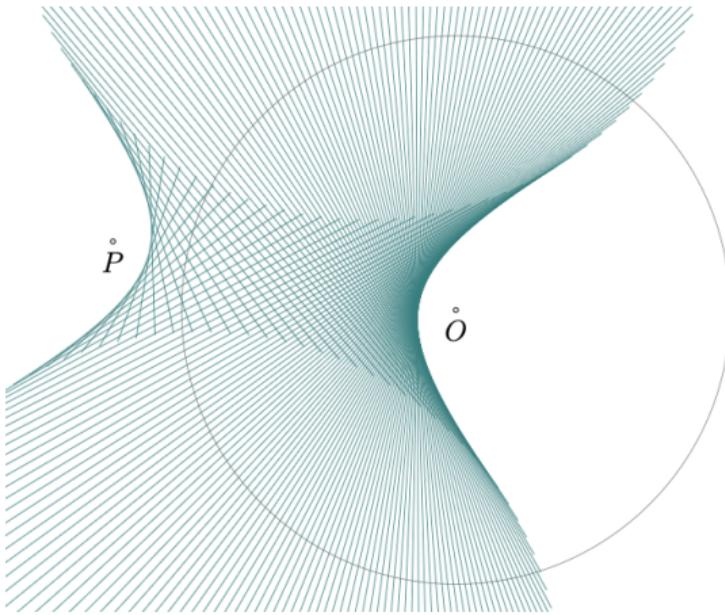
</

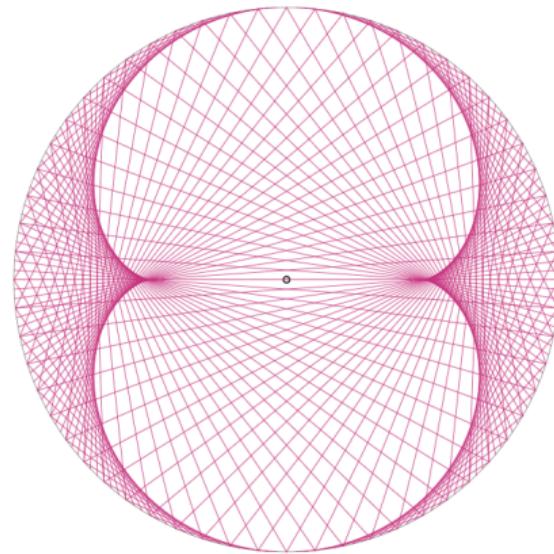
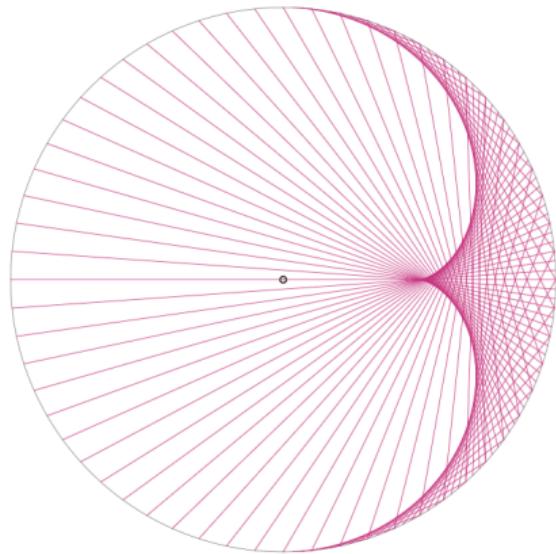
Quelques belles (?) enveloppes



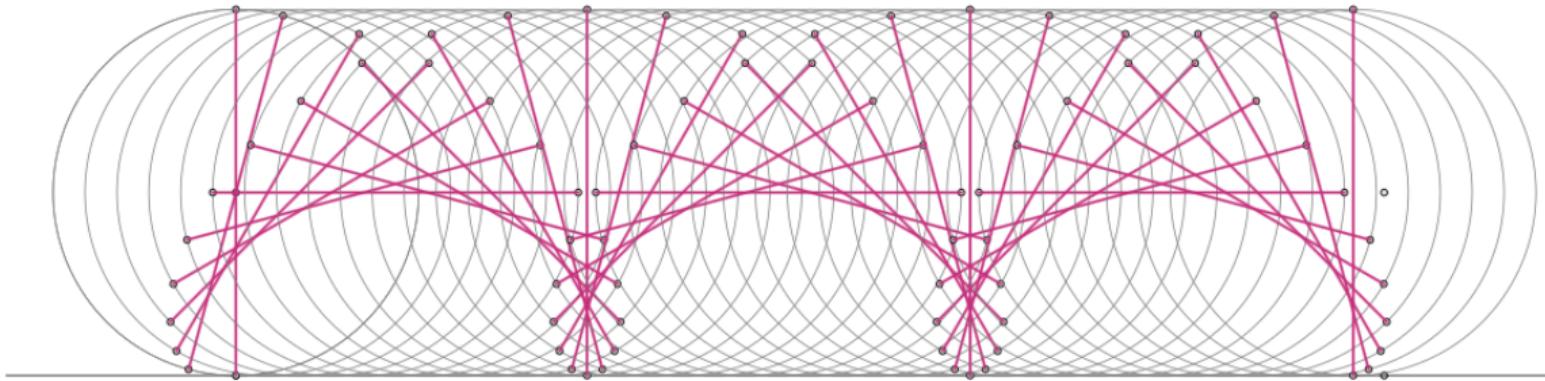










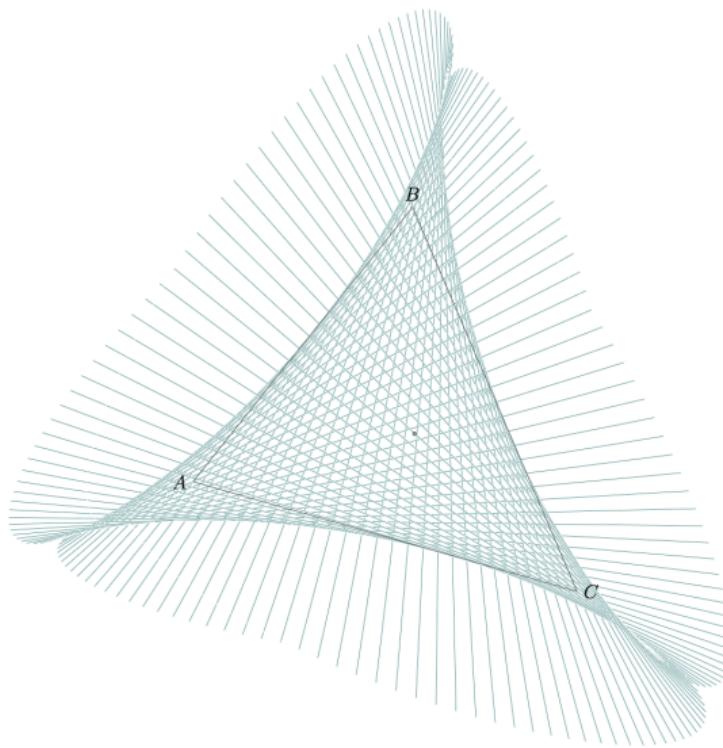


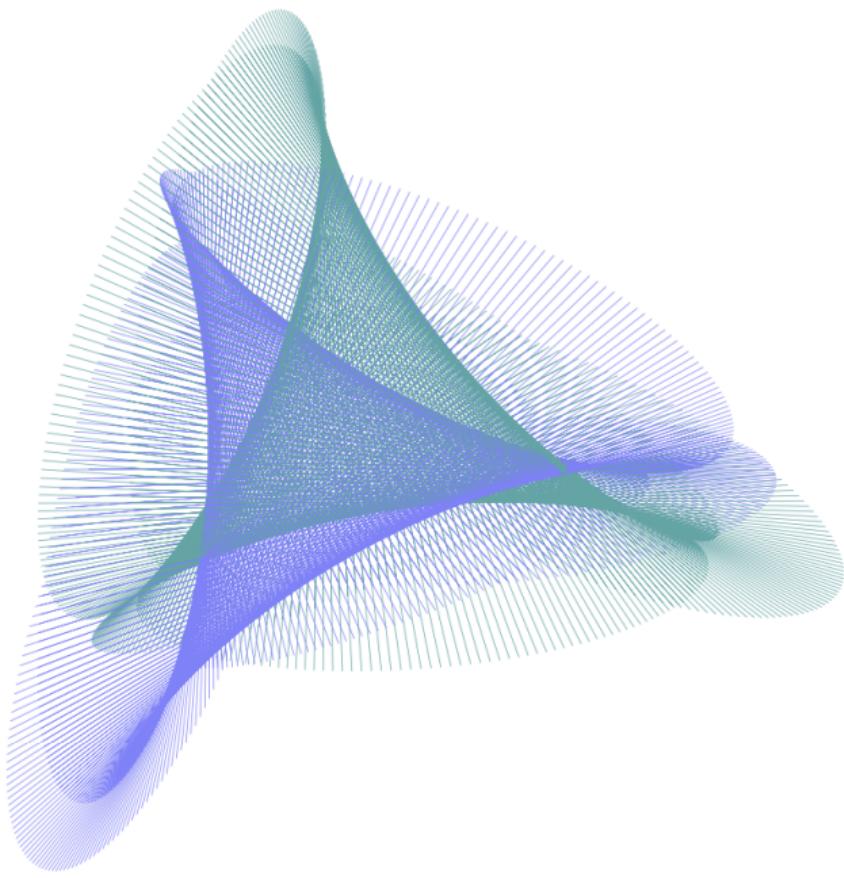
Quelques très belles enveloppes

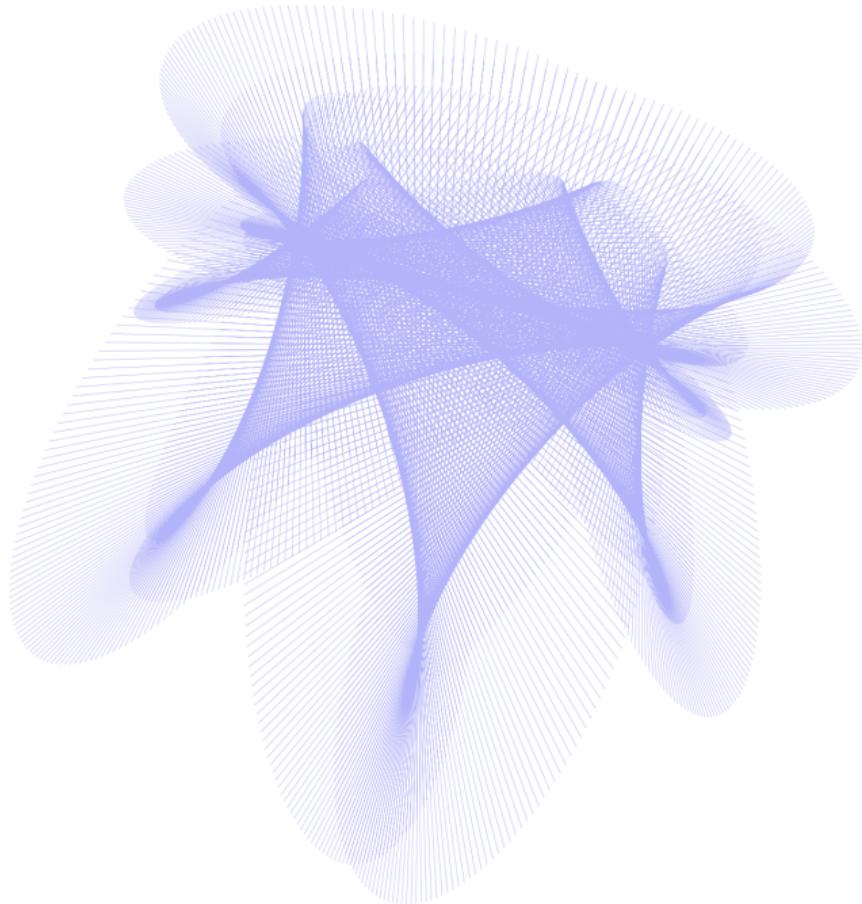
Rares, voire inexistantes dans la littérature . . .

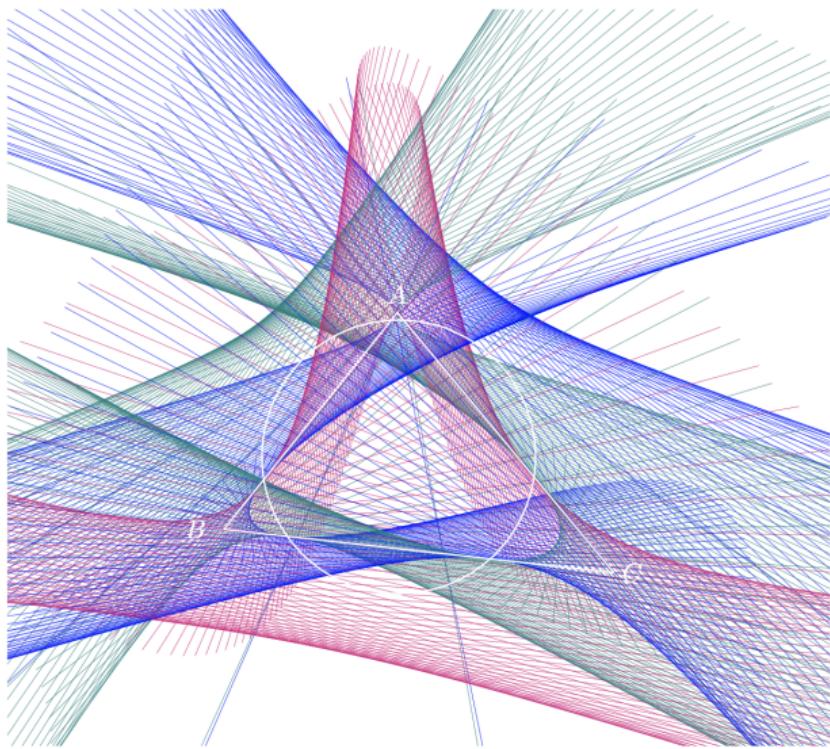
Composées à l'aide du package *tkz-euclide*

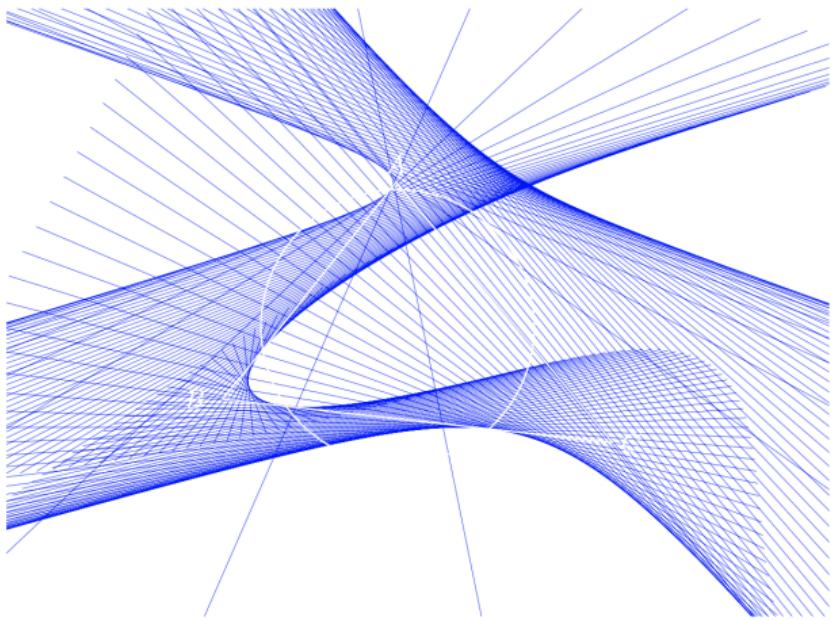
Celle par qui tout a commencé . . .

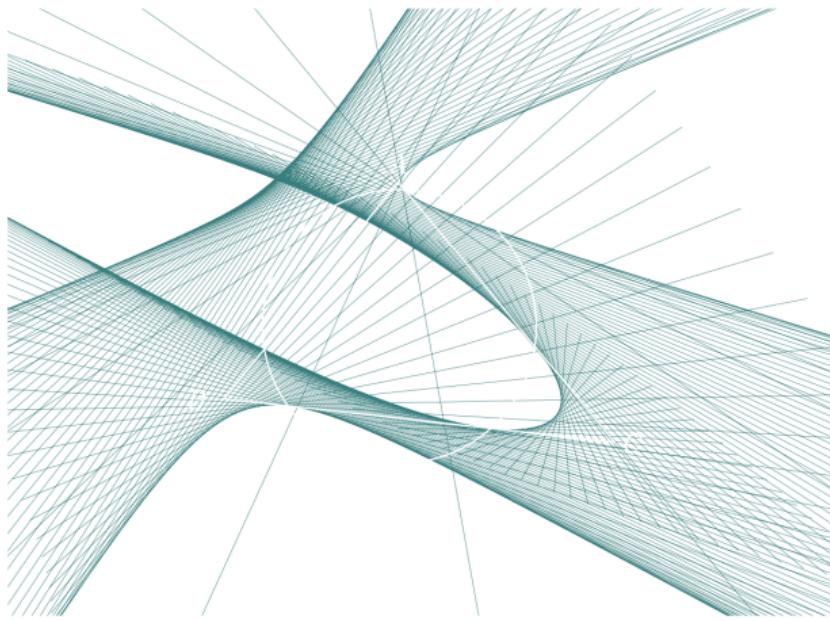


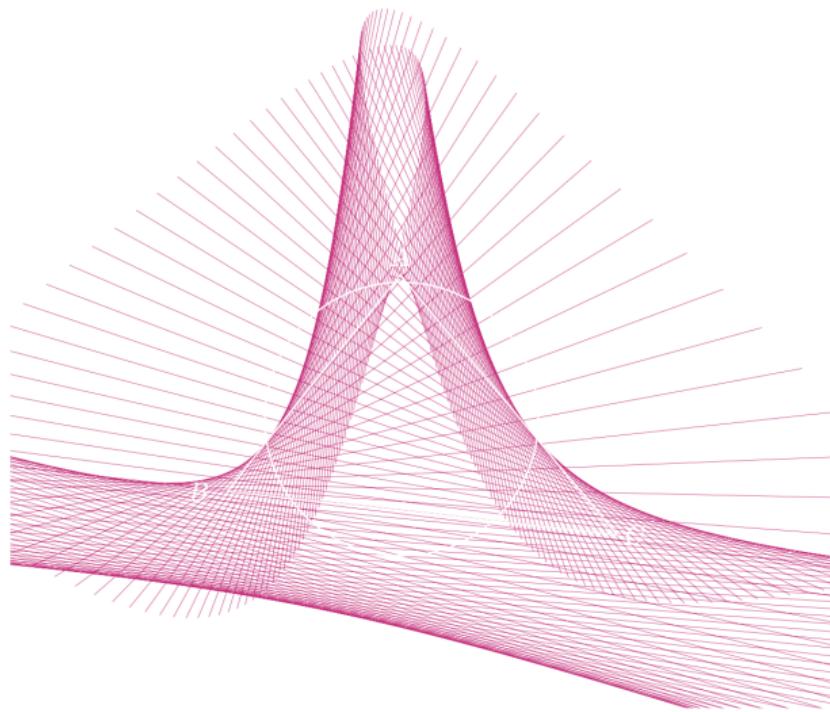


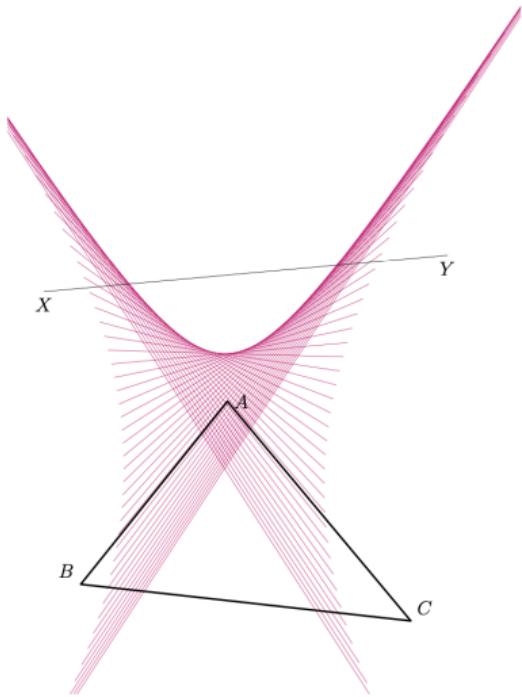


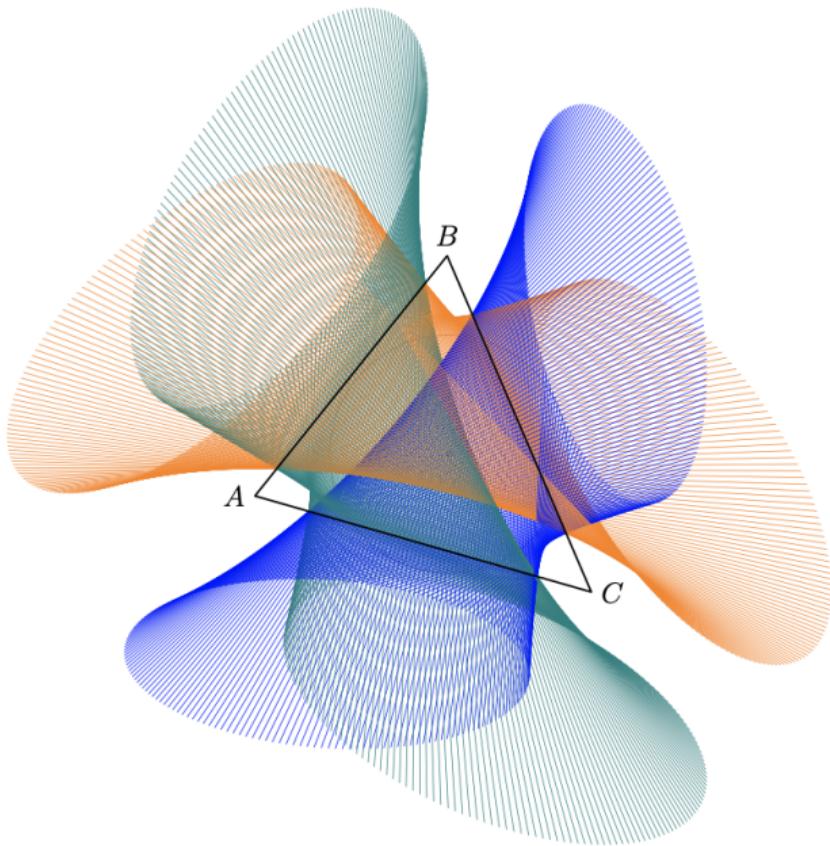


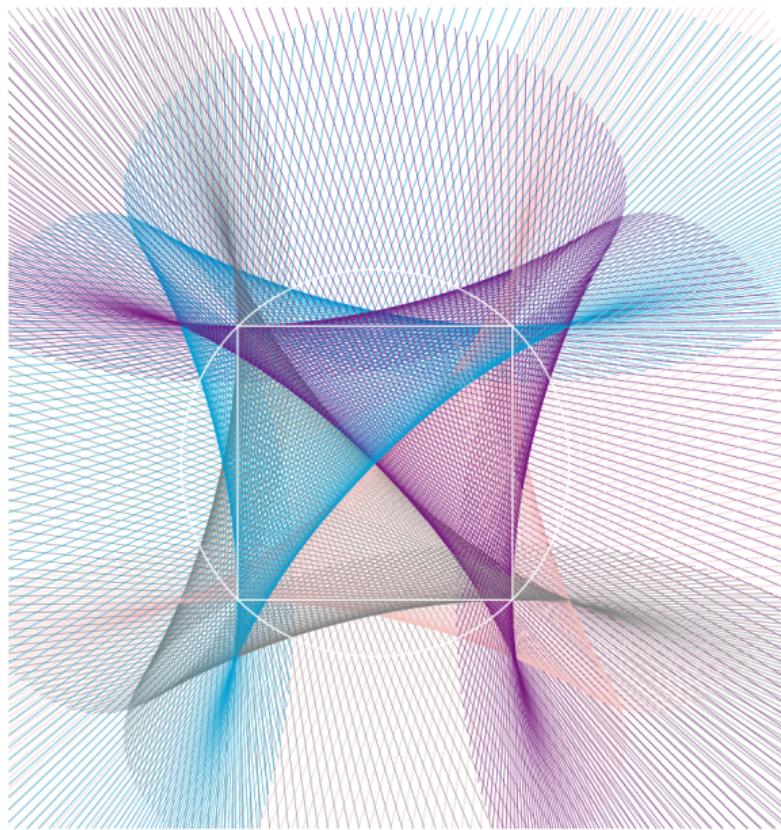


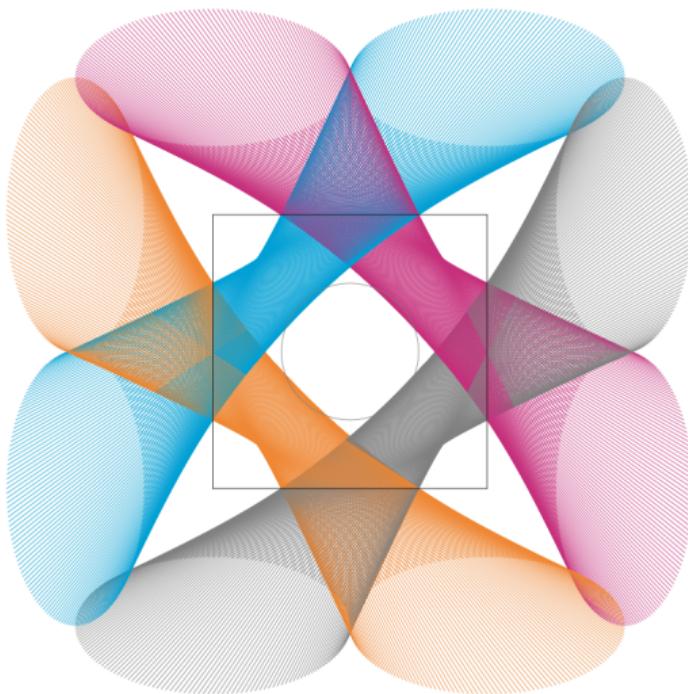


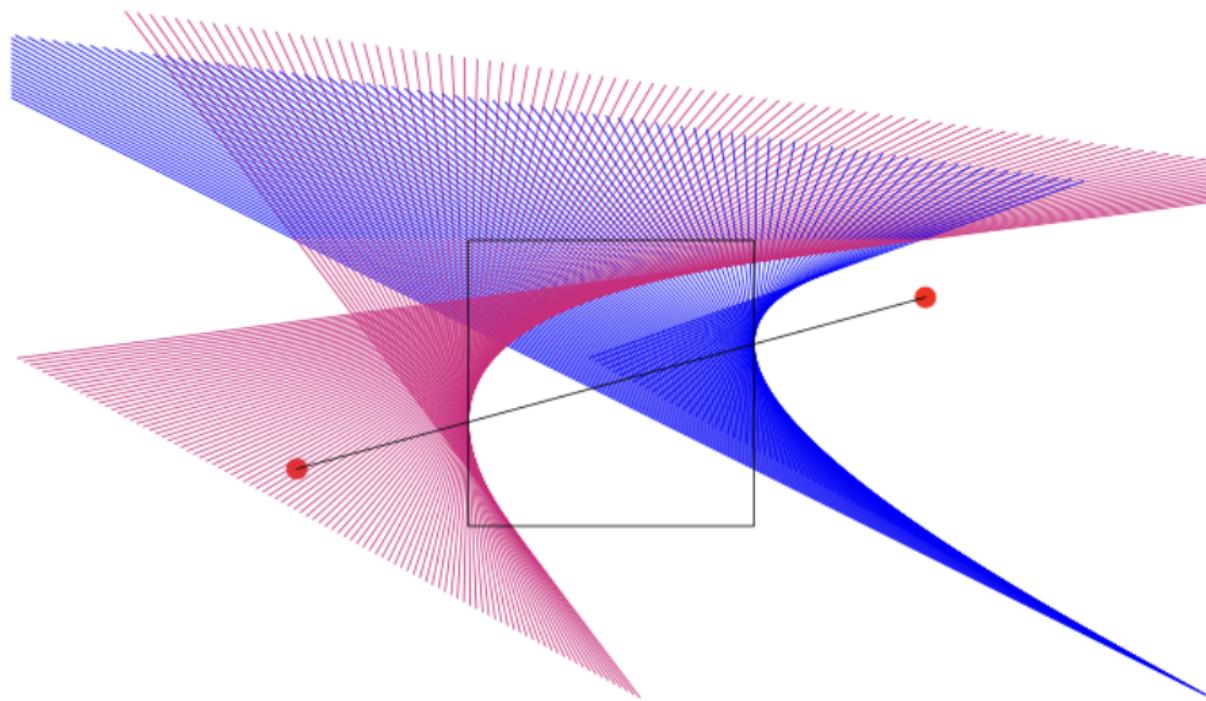


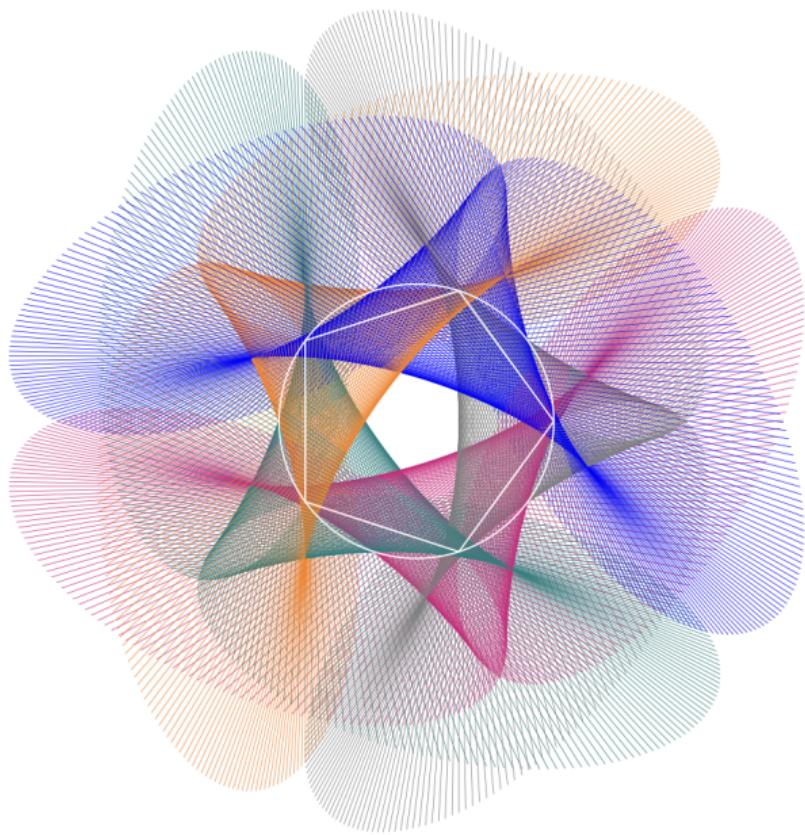


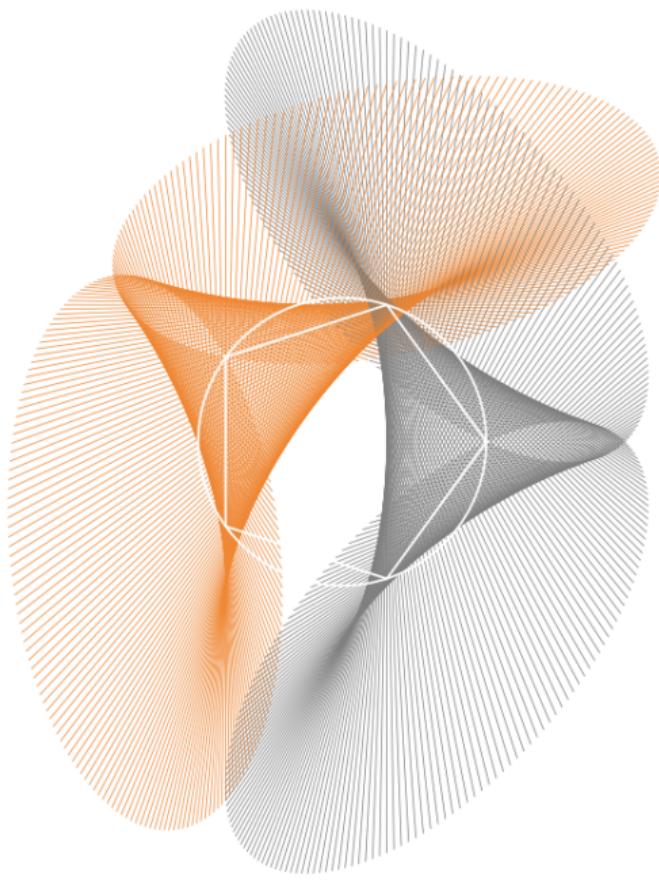


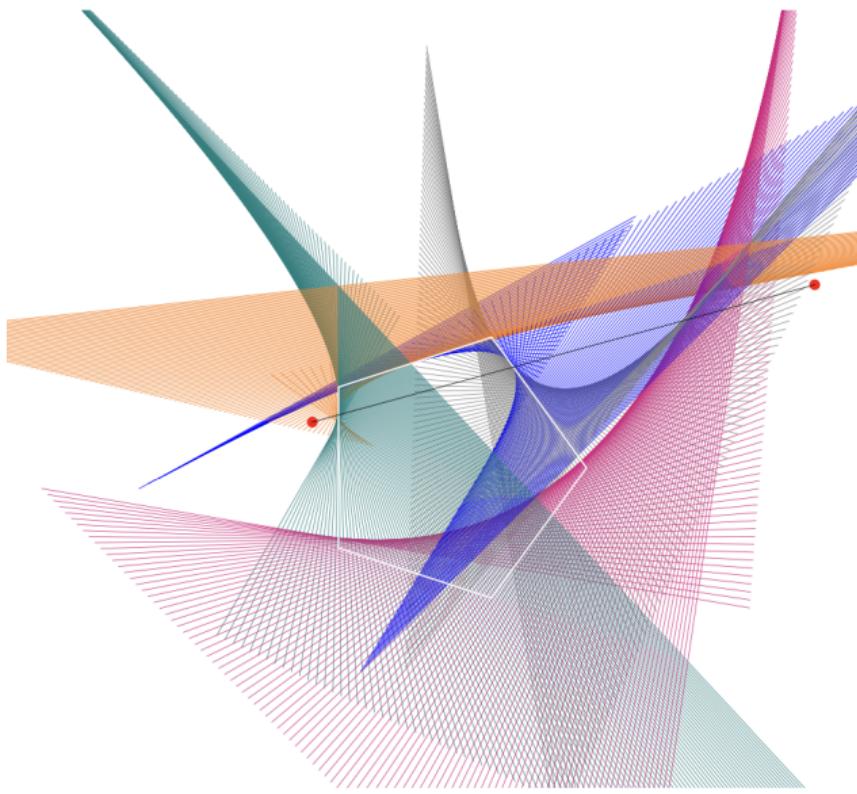


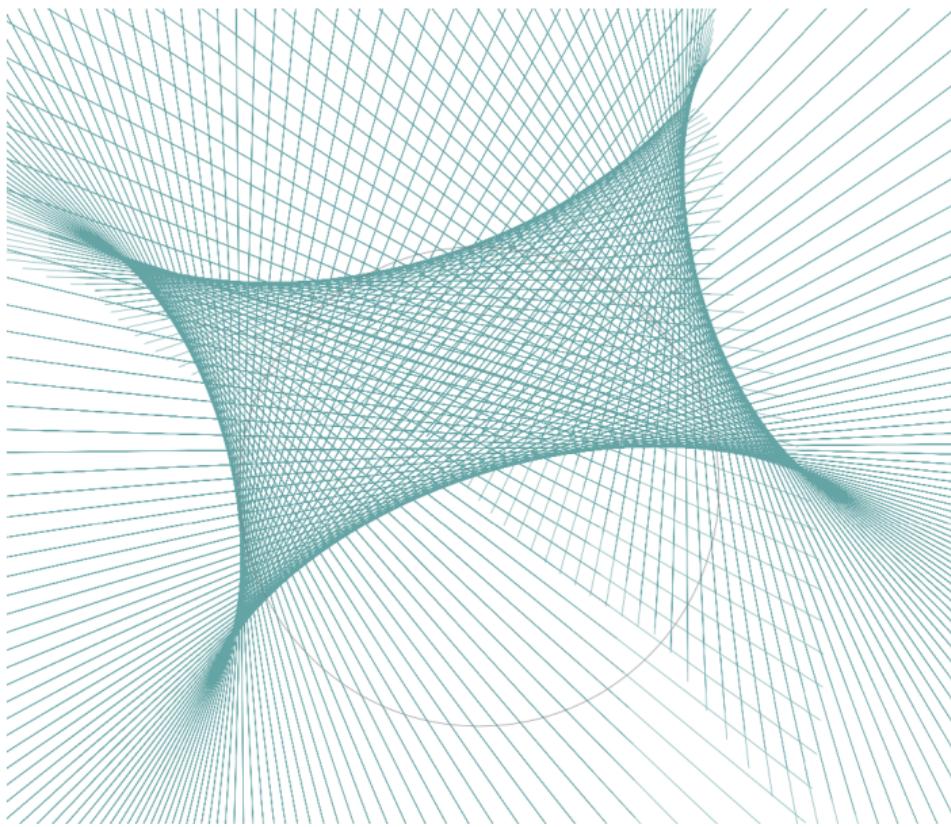


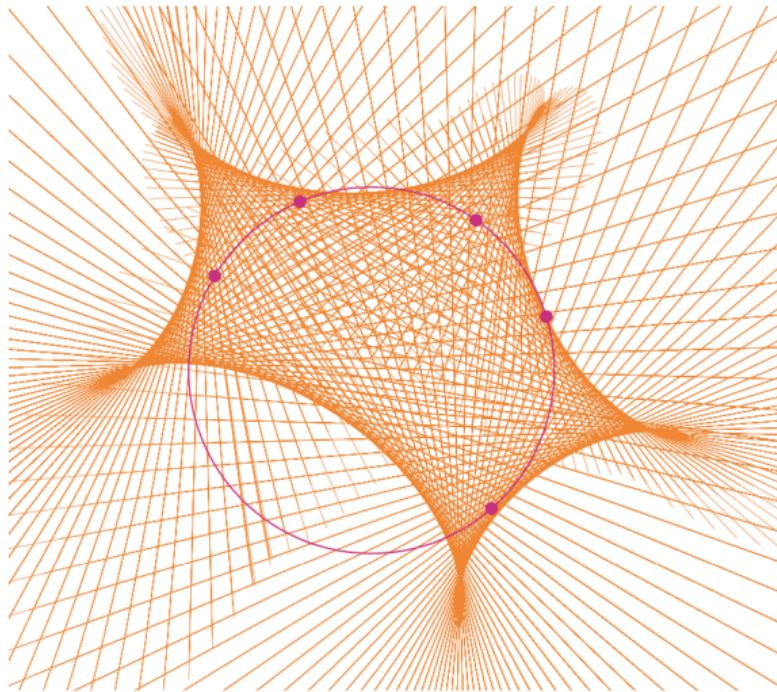












II. Un tout petit peu d'histoire et un Théorème Extraordinaire

Un tout petit peu d'histoire

- **La géométrie euclidienne classique**

Les Éléments d'Euclide.

Les Coniques d'Apollonius (± 240 avant J.-C.)

La postérité de cette géométrie euclidienne *classique*, de I. Newton jusqu'à D. Hilbert.

- **L'algèbre, l'analyse et la géométrie, du XVI^{ème} au XVIII^{ème} siècle**

R. Descartes, P. de Fermat, C. Huygens, Jacques Bernoulli, L. Euler, J.-L. Lagrange, ...

• Le renouveau de la géométrie au XIX^{ème} siècle

La géométrie euclidienne classique → la géométrie du triangle (*A Sequel to Euclid*).

C'est surtout un siècle d'évolutions ininterrompues et très diverses en géométrie.

- * La géométrie projective → éléments idéaux, rapport (an)harmonique, transformations projectives, ...
- * L'irruption des *nombres complexes*, pas seulement en géométrie ou en géométrie projective, mais aussi en analyse.
- * Les premiers développements de la géométrie algébrique → courbes et surfaces algébriques (réelles puis complexes) de petits degrés.
- * La (lente) mise en place de l'*algèbre linéaire*, du *calcul vectoriel*, des *groupes de transformations*, la *théorie des invariants*, etc.



*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss
ihrer Anwendungen. Dritter Band : Geometrie*

- Deux personnages du XIX^{ème} siècle



Jakob Steiner (1796-1863)



Frank Morley (1860-1937).

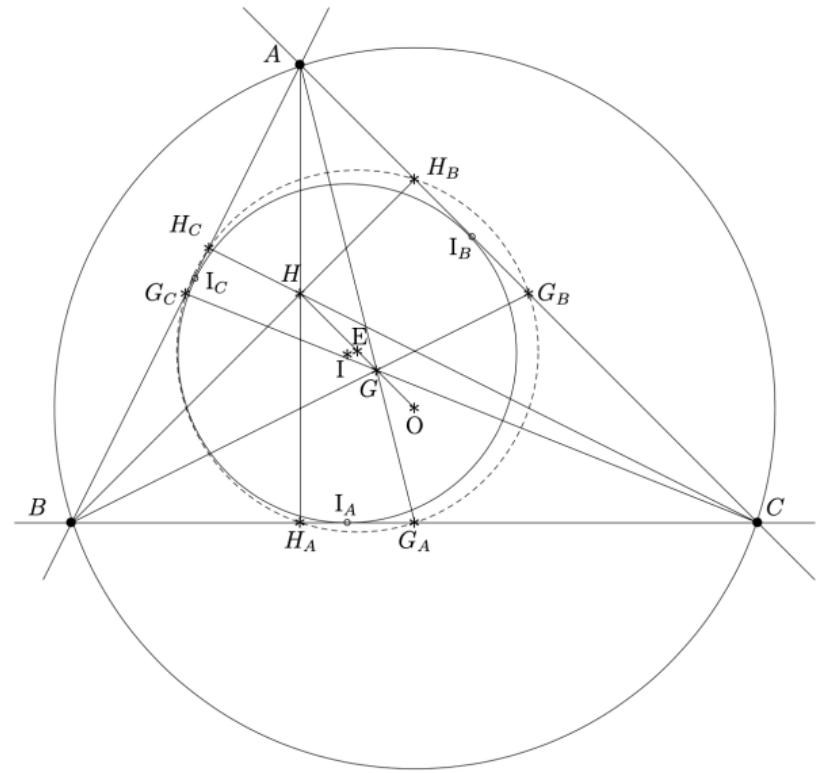
- Et après ... ?

Le Triangle, un objet central

Le triangle est au centre de tout ce qui va suivre.

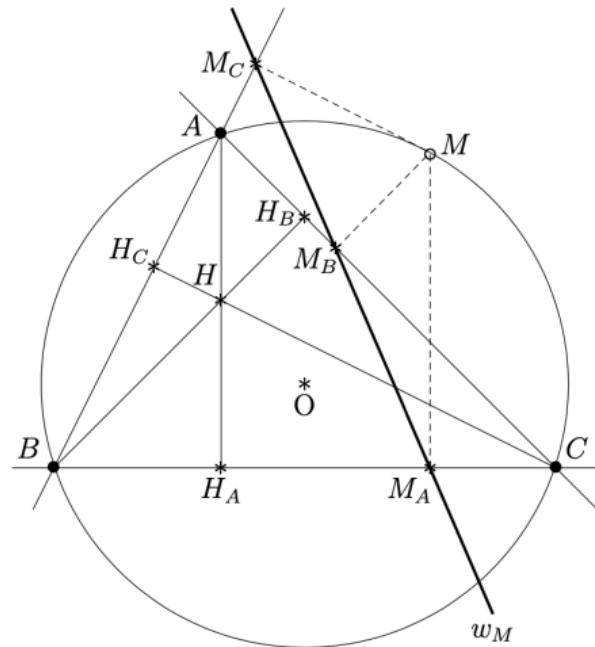
Mais un triangle ne vient jamais seul.

Et de tous les cercles qui l'accompagnent, l'un est plus important que les autres ...



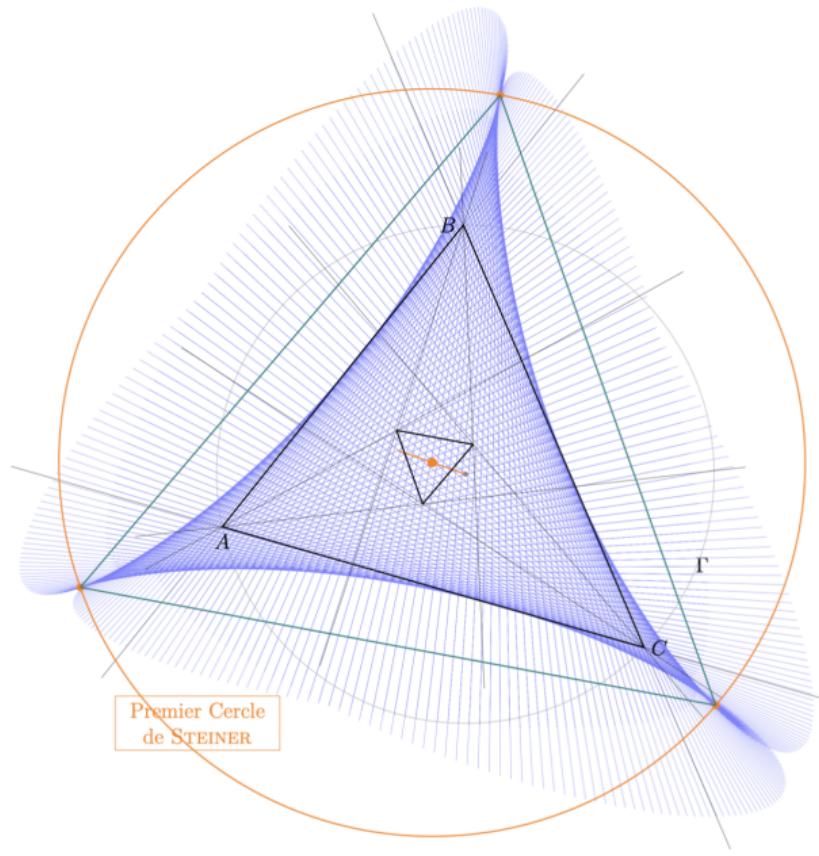
Un Théorème Extraordinaire

Un (petit) miracle : la droite de Wallace



Comment est-il possible qu'un triangle quelconque soit invariablement soumis à la même absolue régularité ?

Et que le résultat de Steiner, indépendant de celui de Morley, se correspondent aussi bien ?



III. D'Euclide à tkz-euclide

Je me présente :

- je m'appelle *tkz-euclide* ;
- mon vrai nom est *tkz-euclide.sty* ;
- mon papa est Alain MATTHÈS, il est français ;
- mon mode d'emploi (fr et us) est sur <http://altermundus.fr> (à lire absolument !) ;
- mon contenu est présent dans les distributions récentes de LATEX
ou sur <https://ctan.org> ;
- je suis donc un *package* du formateur de texte LATEX ;
- je suis un spécialiste des dessins à la **règle** et au **compas** ;
- mon papa m'a composé de *macro-instructions* issues du *package Tikz* ;
- je me charge de TOUS les calculs (intersections de droites, de cercles, projection orthogonale, centre des cercles inscrits et circonscrits, etc. et bien d'autres encore, vous ne savez pas vous imaginer... ;
- je suis puissant, et tellement cool avec ma syntaxe. Voyons... .

Structure d'un document

```
\documentclass[...]{ }

\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{...}

\usepackage[lua]{tkz-euclide}
...
\begin{document}

    \begin{tikzpicture}
        ... ici mes instructions...
    \end{tikzpicture}

\end{document}
```

Un exemple... simple... en direct

```
\begin{tikzpicture}[scale=1]

\tkzDefPoints{0/0/0, 4.75/0/Q, -2/1/P}
\tkzDrawPoints(0, P, Q) \tkzLabelPoints(0, P, Q)
\tkzDrawCircle(0,Q)
\tkzCalcLength(0,Q) \tkzGetLength{r}
\tkzDefPointOnCircle[R= center 0 angle {60} radius {\r}] \tkzGetPoint{M}
\tkzDrawPoints(M) \tkzLabelPoints(M)
\tkzDrawSegment(P,M)
\tkzDefLine[mediator](P,M) \tkzGetPoints{x}{y}
\tkzDrawSegment[magenta](x,y)

\end{tikzpicture}
```

voir ellipse.tex dans dossier demo1

Quelques exemples d'instructions . . .

```
\tkzDefPointOnCircle[R= center 0 angle {60} radius {2}] \tkzGetPoint{M}

\foreach \angle in {0, 5, ..., 355}
\tkzDefPointOnCircle[R= center 0 angle {\angle} radius {2}] \tkzGetPoint{M}

\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,C) \tkzGetPoint{O}

\tkzDefCircle[in](A,B,C) \tkzGetPoints{O}{i}

\tkzDefTriangleCenter[euler](A,B,C)\tkzGetPoint{E}

\tkzDefTriangleCenter[centroid](A,B,C)\tkzGetPoint{G}

\tkzDefLine[tangent from= P](O,A) \tkzDefPoints{i}{j} % tangentes P,i et P,j
```

Quelques exemples d'instructions . . .

```
\tkzInterCC(O,A)(O',A') \tkzGetPoints{P}{Q}

\tkzDefPointOnLine[pos=0.5](A,B) \tkzGetPoint{P}

\foreach \k in {0, 0.1, ..., 1}
\tkzDefPointOnLine[pos=\k](A,B) \tkzGetPoint{P}

\foreach [count=\i] \k in {0, 0.1, ..., 1}
\tkzDefPointOnLine[pos=\k](A,B) \tkzGetPoint{P\i}

\tkzDefPointBy[symmetry= center O](A) \tkzGetPoint{A'}

\tkzDefPointBy[projection= onto A--B](P) \tkzDefPoint{P'}
```

... et des centaines d'autres !

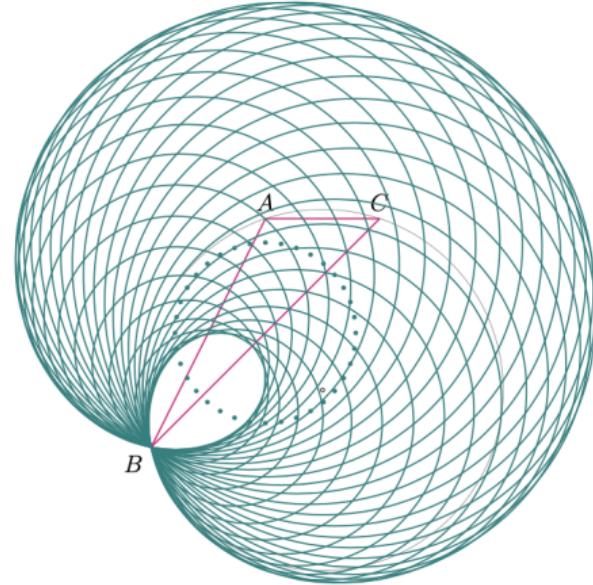
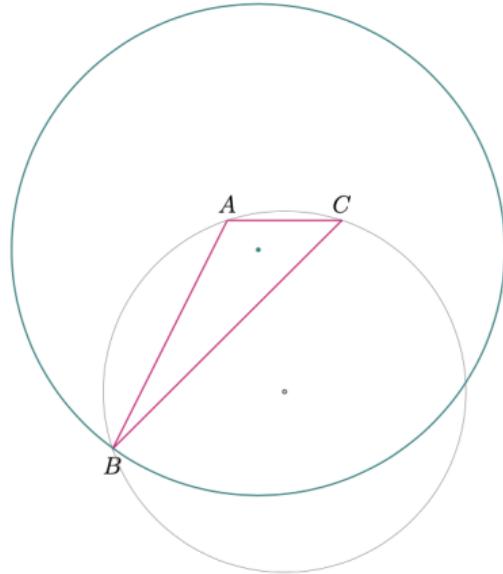
Notre démarche, en général : un va-et-vient

- entre EUCLIDE et *tkz-euclide*
- entre PTI et JMD

Le dernier exemple en date :

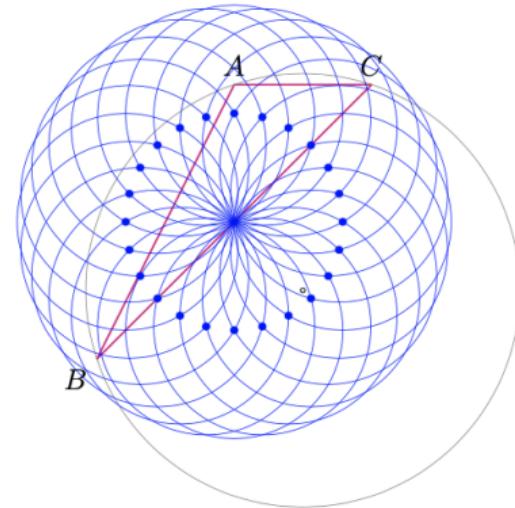
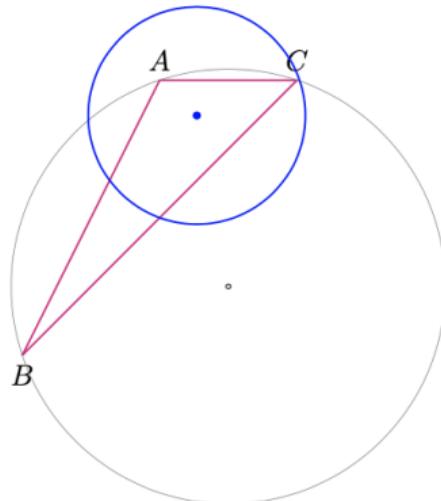
- **PTI** : tu dessines un triangle quelconque ABC et le cercle d'EULER de ce triangle ; puis tu fais la même chose en faisant varier la position du point A sur le cercle circonscrit au triangle.
- **JMD** : cool, je connais les instructions, et la méthode de travail (ce n'est pas la première fois qu'il me titille...) ; on choisit une position de A et on trace le cercle d'EULER, puis avec une boucle `foreach` on fait varier la position de A sur le cercle circonscrit.
Le résultat est « joli », comme souvent, j'envoie les images à mon pote.

MAIS...



JMD, le lendemain : M.... je me suis trompé ! Un cercle d'EULER ne devrait pas passer par un sommet ! Le centre du cercle est correct, mais pour le dessiner, il faut un autre point : j'ai pris B à la place d'un des 9 points... balochard !

À la vitesse V V', je corrige mon erreur et j'envoie les nouveaux résultats et mes plus plates excuses à Philippe.



C'est moins « spectaculaire »...

Je laisse Philippe faire ses commentaires !

À suivre :

- Qu'est-ce qu'une enveloppe ?
- Restons courbés
- Des courbes terriblement circulaires
- Le théorème extraordinaire
- Penchons-nous un peu
- Comment couper un triangle en deux ?
- Céva, ça vient
- Au revoir les triangles, bonjour les polygones
- Au revoir le plan

Qu'est-ce qu'une enveloppe ?

Une courbe (suffisamment différentiable) du plan est généralement conçue comme un ensemble — ou un *lieu* — de points. Pour une courbe du plan, il est facile de déterminer l'ensemble de toutes ses tangentes.

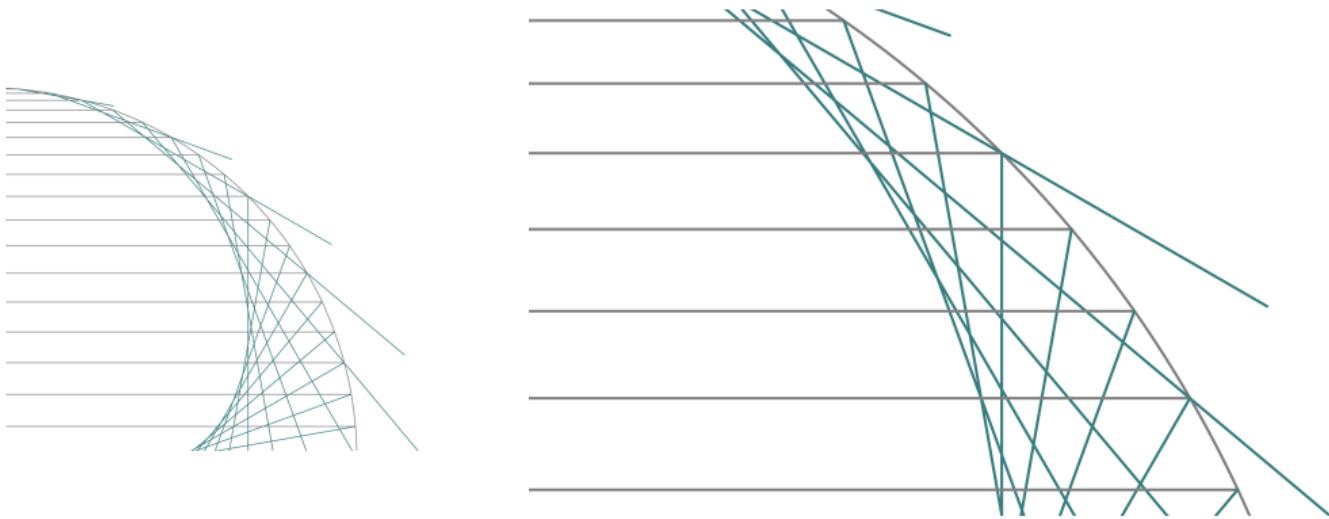
La notion de courbe-enveloppe d'une famille de droites se présente comme la *situation réciproque* — ou *duale* — d'une courbe comme lieu de points.

Plus précisément : on se donne une famille suffisamment différentiable de *droites* dans le plan, et il s'agit de savoir si cette famille est l'ensemble des tangentes à une certaine courbe (qui est donc alors considérée, elle, comme lieu de points).

Cette courbe — pourvu qu'elle existe ! — est appelée une *enveloppe* de la famille de droites.

Mais est-ce bien cela qu'on *voit* sur les représentations graphiques de situations d'enveloppes ?

Or, avec TKZ-EUCLIDE, c'est facile à contrôler !



Il pourrait donc y avoir *deux* approches possibles, même si elles ne semblent pas très éloignées l'une de l'autre.

- D'une part, la recherche de l'enveloppe d'une famille de droites étant considérée comme la *situation réciproque* de celle qui détermine l'ensemble de toutes les tangentes à une courbe : la notion de tangente à une courbe — et donc de dérivée(s) de fonction(s) — devrait y être fondamentale,
- D'autre part, une (autre ?) définition d'enveloppe pourrait être proposée, en termes de *points d'intersection de droites* infiniment proches dans une famille donnée de droites.

... Sauf que dans la première approche, il faut savoir ce qu'est une dérivée. Et que cela ne semble pas nécessaire dans la seconde.

Mais cette seconde approche peut-elle fonctionner, calculatoirement ?

Quel cadre pour l'enveloppe ?

S'il s'agit de *calculer*, quels sont les outils à mobiliser ?

- Les systèmes de coordonnées cartésiennes (réelles) orthonormées.

Mais aussi les systèmes de coordonnées *obliques*. Et ces systèmes sont loin d'être les seuls, et les meilleurs !

Il y a aussi beaucoup de systèmes de coordonnées dites *projectives* (ponctuelles ou tangentielle), un peu perdus de vue, ... et sans oublier les systèmes de coordonnées en termes de nombres complexes.

- La résolution des systèmes d'équations linéaires du premier degré à deux inconnues, et les équations paramétriques de courbes du plan, car on se limite aux enveloppes de familles de droites.

- La trigonométrie.

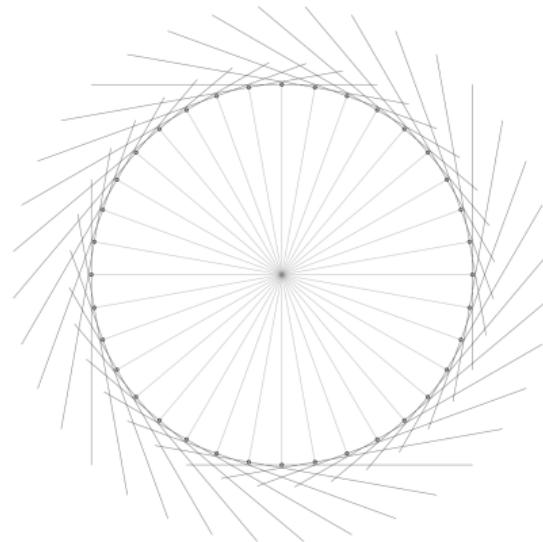
... À moins qu'on ne dispose de nombres complexes, bien plus efficaces ... et bien plus géométriques.

Un exemple *trop simple*

- **L'énoncé**

On considère la famille des segments libres, mais de longueur fixée, et dont une des extrémités est fixée.

Quelle est l'enveloppe des perpendiculaires à l'autre extrémité (libre) de chaque segment de cette famille ?



- **La solution géométrique**

Elle est élémentaire ...

... et c'est donc facile d'aller la *revoir* algébriquement de plus près.

• La solution algébrique

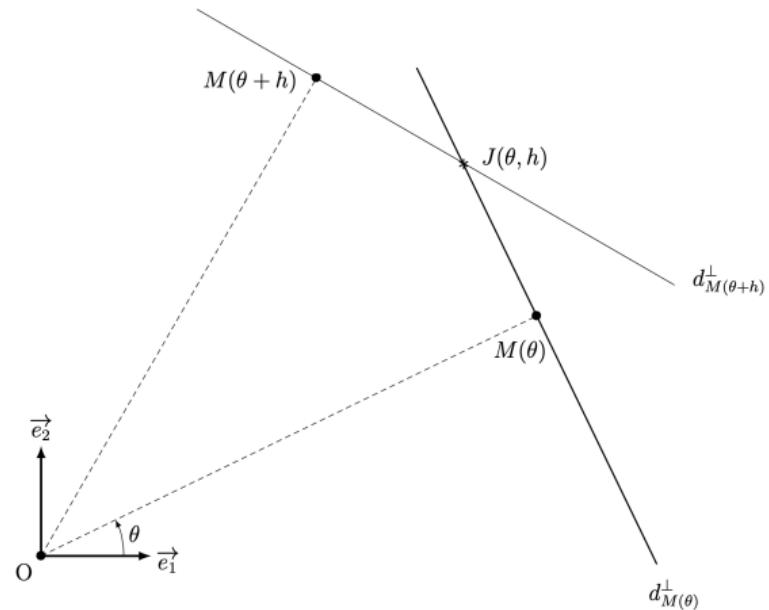
Il s'agit de déterminer comment deux droites (suffisamment proches) se coupent.

La droite $d_{OM(\theta)}^\perp$, perpendiculaire en $M(\theta)$ à la droite $d_{OM(\theta)}$, a comme équation cartésienne :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \ell = 0$$

Pareillement, la droite $d_{OM(\theta+h)}^\perp$, perpendiculaire en $M(\theta+h)$ à la droite $d_{OM(\theta+h)}$, a comme équation cartésienne :

$$x \cos(\theta+h) + y \sin(\theta+h) = \ell$$



On veut déterminer le point d'intersection $\{J(h, \theta)\} := d_{OM(\theta)}^\perp \cap d_{OM(\theta+h)}^\perp$:

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta &= \ell \\ x \cos(\theta + h) + y \sin(\theta + h) &= \ell \end{cases}$$

On a, par soustraction membre-à-membre :

$$x(h, \theta) \cdot \{\cos(\theta + h) - \cos \theta\} + y(h, \theta) \cdot \{\sin(\theta + h) - \sin \theta\} = 0$$

d'où :

$$y(h, \theta) = -\frac{\cos(\theta + h) - \cos \theta}{\sin(\theta + h) - \sin \theta} \cdot x(h, \theta) = -\frac{-2 \cdot \sin \frac{2\theta + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{2 \cdot \cos \frac{2\theta + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}} \cdot x(h, \theta) = \tan\left(\theta + \frac{h}{2}\right) \cdot x(h, \theta)$$

La solution du système s'en déduit alors sans peine, et on trouve tous calculs faits :

$$J(h, \theta) : (x(h, \theta); y(h, \theta)) := \left(\ell \cdot \frac{\cos\left(\frac{h}{2} + \theta\right)}{\cos \frac{h}{2}} ; \ell \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2} + \theta\right)}{\cos \frac{h}{2}} \right)$$

On en déduit tout de suite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} J(h, \theta) = \lim_{h \rightarrow 0} (x(h, \theta); y(h, \theta)) = (\ell \cos \theta; \ell \sin \theta) = M(\theta)$$

On a ainsi obtenu les *équations paramétriques* de la courbe-enveloppe \mathcal{E} de la famille des droites $d_{OM(\theta)}^\perp$:

$$\begin{cases} x = x_{J(\theta)} = \ell \cos \theta \\ y = y_{J(\theta)} = \ell \sin \theta \end{cases}$$

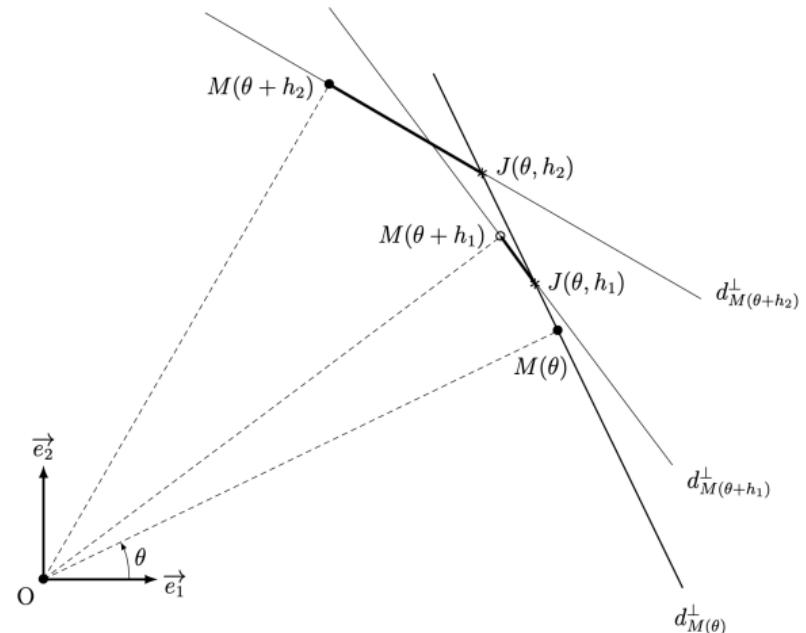
On peut aussi vérifier que, quel que soit $\theta \in [0; 2\pi[$, la droite $d_{OM(\theta)}^\perp$ est effectivement une tangente en $J(\theta)$ à la courbe-enveloppe \mathcal{E} :

- soit par calcul (de dérivées ...),
- soit en montrant que la courbe \mathcal{E} n'a qu'*un seul* point d'intersection avec chacune des droites $d_{OM(\theta)}^\perp$... mais « *double* ».

- ***Un seul point . . . « double » ?***

Pendant que $h \rightarrow 0$, il y a toujours sur *chaque* droite *deux* points en jeu : $M(\theta + h)$ et le point d'intersection $J(\theta, h)$.

Dans leur mouvement vers $d_{OM(\theta)}^\perp$, ces deux points $M(\theta + h)$ et $J(\theta, h)$ se rapprochent, et c'est seulement à la *limite* qu'ils n'en feront plus qu'un !



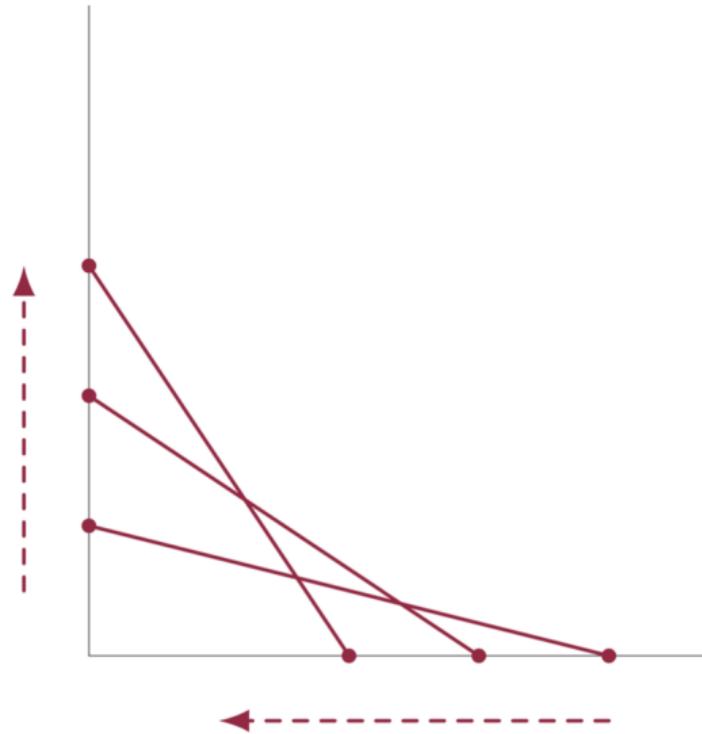
Un point *double* est donc un point qui « se souvient » qu'il est le résultat de la fusion de deux points distincts !

Un exemple classique, et important

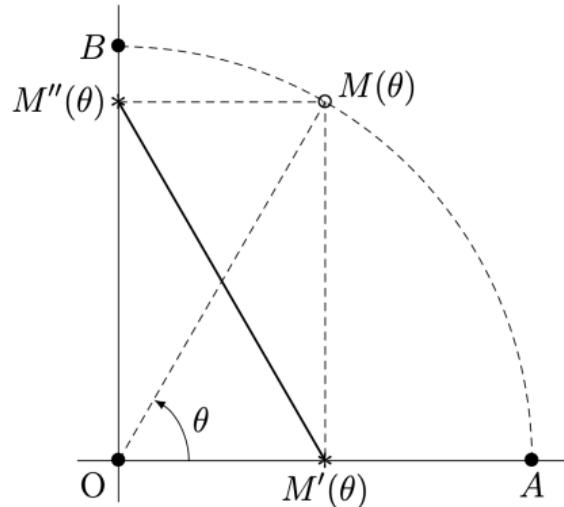
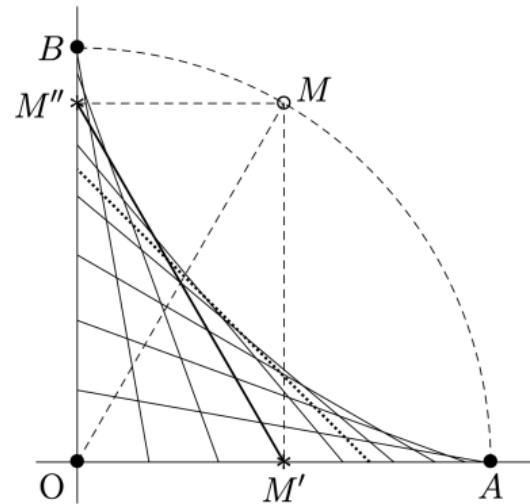
- **L'énoncé**

On considère toutes les positions d'un segment de droite de longueur invariable— notée ℓ — mais dont les deux extrémités ne peuvent être situées que le long de deux axes perpendiculaires.

Comment caractériser la courbe tangente à toutes les positions de ce segment de droite ?



• Une observation fondamentale



Une équation cartésienne de la droite $d_\theta := d_{M'(\theta)M''(\theta)}$ est donc donnée par :

$$\frac{x}{\ell \cos \theta} + \frac{y}{\ell \sin \theta} = 1$$

ou, après réduction au même dénominateur :

$$x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta - \ell \sin \theta \cos \theta = 0$$

• Des équations paramétriques pour l'enveloppe

On suit le modèle de l'**Exemple trop simple**.

Les coordonnées du point $\{J(\theta, h)\} := d_\theta \cap d_{\theta+h}$ s'obtiennent en résolvant le *système du premier degré* :

$$\begin{cases} x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta - \ell \sin \theta \cos \theta = 0 \\ x \cdot \sin(\theta + h) + y \cdot \cos(\theta + h) - \ell \sin(\theta + h) \cos(\theta + h) = 0 \end{cases}$$

Après quelques calculs, essentiellement trigonométriques, on trouve :

$$\begin{cases} x_{J(\theta, h)} = \ell \cdot \frac{\cos \theta \cdot \cos(\theta + h) \cdot \cos\left(\theta + \frac{h}{2}\right)}{\cos \frac{h}{2}} \\ y_{J(\theta, h)} = \ell \cdot \frac{\sin \theta \cdot \sin(\theta + h) \cdot \sin\left(\theta + \frac{h}{2}\right)}{\cos \frac{h}{2}} \end{cases}$$

Les équations paramétriques de l'enveloppe \mathcal{E} s'obtiennent alors en faisant $h \rightarrow 0$ ci-dessus, d'où :

$$\begin{cases} x_{J(\theta)} = \lim_{h \rightarrow 0} x_{J(\theta, h)} = \ell \cdot \cos^3 \theta \\ y_{J(\theta)} = \lim_{h \rightarrow 0} y_{J(\theta, h)} = \ell \cdot \sin^3 \theta \end{cases}$$

• Des équations cartésiennes pour l'enveloppe

En éliminant le paramètre θ , on obtient d'abord :

$$\left(\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

qui équivaut à :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \ell^{\frac{2}{3}}$$

Élevant les deux membres de cette équation au cube, on obtient :

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} = \ell^2$$

c'est-à-dire :

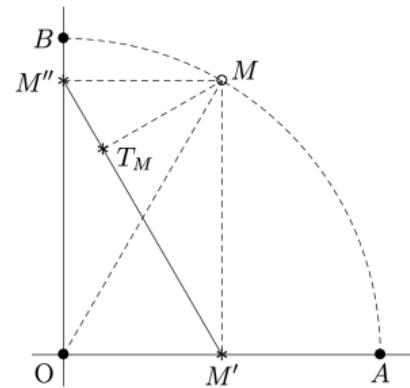
$$x^2 + y^2 - \ell^2 = -3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\ell^{\frac{2}{3}}$$

Élevant à nouveau les deux membres de cette dernière relation au cube, on obtient finalement une expression *polynomiale* en x et y , à savoir :

$$(x^2 + y^2 - \ell^2)^3 + 27\ell^2x^2y^2 = 0$$

L'enveloppe \mathcal{E} est donc une *courbe algébrique rationnelle du sixième degré*.

• Le retour de la tangente



Si $d_{MT_M} \perp d_{M'M''}$, on a d'abord :

$$|MT_M| = |MM''| \cdot \sin \theta = \ell \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

On en déduit :

$$x_{T_M} = x_M - |MT_M| \cdot \sin \theta = \ell \cdot \cos \theta - \ell \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta = \ell \cdot \cos \theta \cdot (1 - \sin^2 \theta) = \ell \cdot \cos^3 \theta$$

Et pareillement, on obtient :

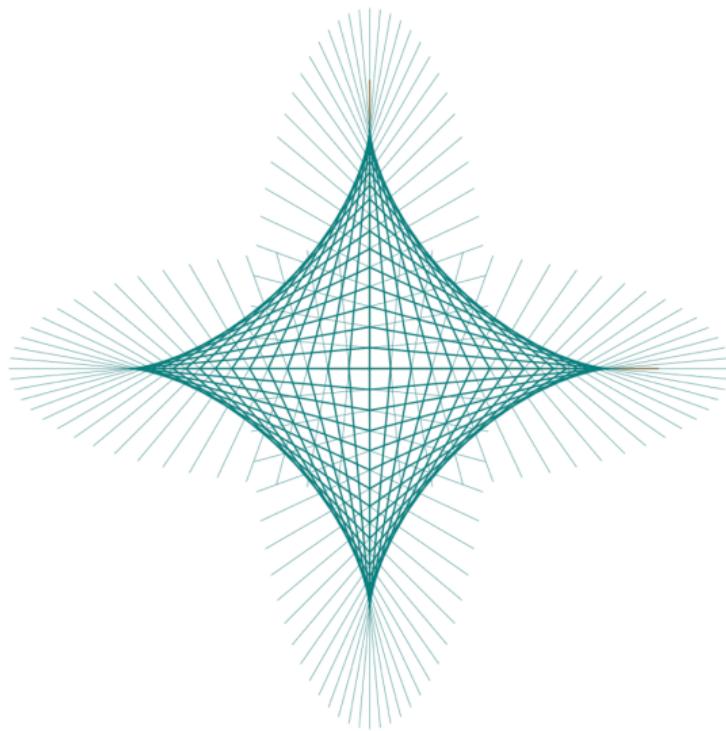
$$y_{T_M} = y_M - |MT_M| \cdot \cos \theta = \ell \cdot \sin \theta - \ell \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta = \ell \cdot \sin \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) = \ell \cdot \sin^3 \theta$$

Comparant avec les équations paramétriques de l'enveloppe, on observe ainsi que le pied T_M de la perpendiculaire issue du point M à la droite $d_{M'M''}$ est toujours le *point de contact* de l'enveloppe avec sa tangente $d_{M'M''}$.

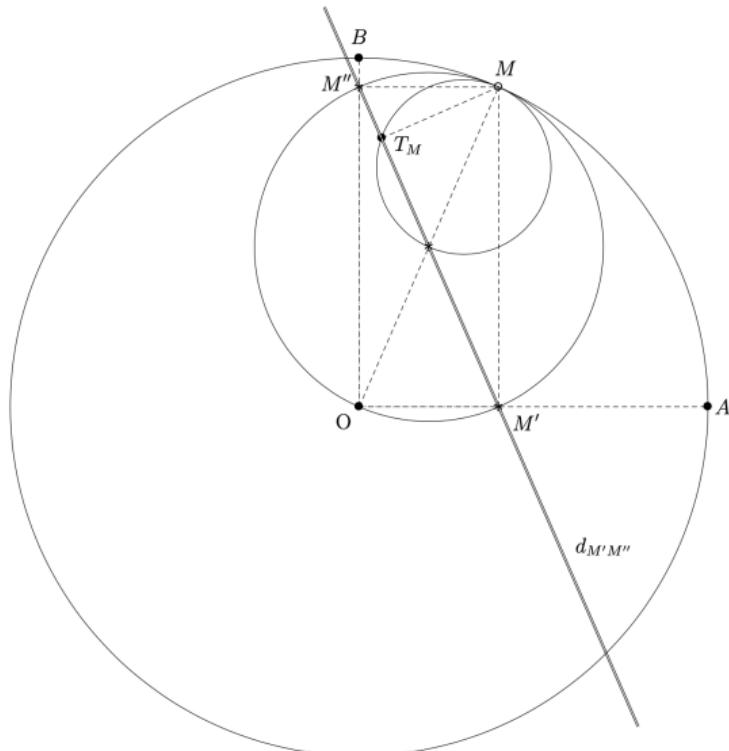
• L'identification de l'enveloppe

Les équations paramétriques pour l'enveloppe \mathcal{E} sont celles d'une courbe appelée *astroïde*.

En voici une image, grâce à
TKZ-EUCLIDE.



Cette courbe est aussi connue comme une *hypocycloïde à quatre points de rebroussement*. C'est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r lorsqu'il roule sur le bord intérieur d'un autre cercle, fixe, de rayon $4r$.



Et la géométrie d'une courbe analogue à cette hypocycloïde va intervenir massivement dans la suite

...

Alors, comment *calculer* une enveloppe ?

On se fixe un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan euclidien.

- **La notion de famille (à un paramètre) de droites du plan**

Si \mathbb{I} est un intervalle réel non vide, une famille à un paramètre de droites du plan est l'ensemble des droites δ_t ($t \in \mathbb{I}$) d'équation cartésienne :

$$\mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) = 0$$

où $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$ et $\mathfrak{c}(t)$ sont trois fonctions suffisamment différentiables sur leur domaine de définition \mathbb{I} commun, et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{I} : (\mathfrak{a}(t))^2 + (\mathfrak{b}(t))^2 \neq 0$$

Cette dernière condition est là pour garantir que *chaque* élément de l'ensemble $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ est effectivement une droite.

- **Deux définitions d'enveloppe, et ce qu'elles impliquent**

La première définition est duale de celle de famille de droites-tangentes à une courbe *donnée*.

Une T-enveloppe d'une famille $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ de droites du plan est une courbe \mathcal{E}_T , suffisamment différentiable, telle que, quel que soit $t \in \mathbb{I}$: la droite δ_t est tangente à cette courbe \mathcal{E}_T .

Ce n'est pas de cette manière que les exemples précédents ont été traités !

Une enveloppe d'une famille de droites y est une courbe figurée à partir de ce que les images réalisées sous TKZ-EUCLIDE suggèrent, c'est-à-dire l'enchaînement des *points d'intersection* des droites de la famille, lorsque celles-ci sont suffisamment proches l'une de l'autre.

Or, le procédé de calcul employé dans ces exemples se prolonge tel quel à la situation générale d'une famille (à un paramètre) de droites du plan.

Si $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, avec t et $t+h \in \mathbb{I}$, on note $(x_{J(t,h)}; y_{J(t,h)})$ les coordonnées du point :

$$J(t, h) := \delta_t \cap \delta_{t+h}$$

pourvu qu'un tel point existe. Pour déterminer ces coordonnées, il suffit de résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} a(t) \cdot x + b(t) \cdot y + c(t) = 0 \\ a(t+h) \cdot x + b(t+h) \cdot y + c(t+h) = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système existe — et est unique ! — si et seulement si :

$$a(t) \cdot b(t+h) - a(t+h) \cdot b(t) \neq 0$$

et dans ce cas, elle est donnée par :

$$\begin{cases} x_{J(t,h)} = -\frac{c(t) \cdot b(t+h) - c(t+h) \cdot b(t)}{a(t) \cdot b(t+h) - a(t+h) \cdot b(t)} \\ y_{J(t,h)} = -\frac{c(t) \cdot a(t+h) - c(t+h) \cdot a(t)}{a(t) \cdot b(t+h) - a(t+h) \cdot b(t)} \end{cases}$$

En conséquence, voici une seconde définition de courbe-enveloppe.

*Une famille $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ de droites du plan possède une **L-enveloppe** si, quel que soit $t \in \mathbb{I}$, les coordonnées $(x_{J(t,h)}; y_{J(t,h)})$ du point $J(t, h)$ ainsi que leurs limites :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_{J(t,h)} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} y_{J(t,h)}$$

existent. Si $x_{J(t)}$ et $y_{J(t)}$ sont les valeurs de ces limites, la L-enveloppe est alors la courbe notée \mathcal{E}_L , et définie par :

$$\mathcal{E}_L := \{(x_{J(t)}; y_{J(t)}) \mid t \in \mathbb{I}\}$$

Naturellement, une question se pose : ces deux définitions signifient-elles la même chose ?

- **Les deux définitions d'enveloppe impliquent la condition classique**

Théorème

On considère une famille $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ de droites du plan, d'équation cartésienne :

$$\mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) = 0$$

les trois fonctions $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$ et $\mathfrak{c}(t)$ étant supposées suffisamment différentiables sur leur domaine de définition \mathbb{I} commun.

Si cette famille possède une T-enveloppe \mathcal{E}_T , alors :

$$\forall t \in \mathbb{I}, \forall (x; y) \in \mathcal{E}_T : \begin{cases} \mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) = 0 \\ \mathfrak{a}'(t) \cdot x + \mathfrak{b}'(t) \cdot y + \mathfrak{c}'(t) = 0 \end{cases}$$



Voici le résultat analogue au précédent, mais cette fois-ci pour une L-enveloppe.

Théorème

On considère une famille $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ de droites du plan, d'équation cartésienne :

$$\mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) = 0$$

les trois fonctions $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$ et $\mathfrak{c}(t)$ étant supposées suffisamment différentiables sur leur domaine de définition \mathbb{I} commun.

Si cette famille possède une L-enveloppe \mathcal{E}_L , alors :

$$\forall t \in \mathbb{I}, \forall (x_{J(t)}; y_{J(t)}) \in \mathcal{E}_L : \begin{cases} \mathfrak{a}(t) \cdot x_{J(t)} + \mathfrak{b}(t) \cdot y_{J(t)} + \mathfrak{c}(t) = 0 \\ \mathfrak{a}'(t) \cdot x_{J(t)} + \mathfrak{b}'(t) \cdot y_{J(t)} + \mathfrak{c}'(t) = 0 \end{cases}$$



- **Les enveloppes de familles *rationnelles* de droites sont toujours calculables**

Une famille *polynomiale*, ou *rationnelle*, de droites du plan est une famille $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ de droites du plan, d'équations cartésiennes :

$$\mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) = 0$$

pour laquelle les trois fonctions $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$ et $\mathfrak{c}(t)$ sont des *polynômes*.

Il est bien connu que, si les trois fonctions $\mathfrak{a}(t)$, $\mathfrak{b}(t)$ et $\mathfrak{c}(t)$ sont des fractions rationnelles en $\sin \theta$, $\cos \theta$ et $\tan \theta$, les formules classiques :

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

permettent de se ramener à ce cas d'une famille rationnelle de droites du plan, en posant $t := \tan \frac{\theta}{2}$.

On suppose que cette famille *rationnelle* de droites du plan possède une T-enveloppe, ou une L-enveloppe \mathcal{E} .

On considère alors le polynôme :

$$\mathbb{P}(t) := \mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) \in \mathbb{R}[x, y](t)$$

comme un polynôme un peu particulier. C'est un polynôme en l'indéterminée t , mais dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes — au plus du premier degré! — en x et en y .

Dans ce cadre, la condition :

$$\mathfrak{a}(t) \cdot x + \mathfrak{b}(t) \cdot y + \mathfrak{c}(t) = 0$$

— qui définit la famille de droites du plan — revient à déterminer les racines $t = t_0$, ou plutôt : $t = t_0(x, y)$ de l'équation polynomiale $\mathbb{P}(t) = 0$.

Mais surtout :

- l'analyse de la notion de point « double » dans la vision d'une courbe-enveloppe sous TKZ-EUCLIDE,
- ou la forme classique de calcul d'une telle courbe, à partir de la résolution du système :

$$\forall t \in \mathbb{I}, \forall (x; y) \in \mathcal{E} : \begin{cases} a(t) \cdot x + b(t) \cdot y + c(t) = 0 \\ a'(t) \cdot x + b'(t) \cdot y + c'(t) = 0 \end{cases}$$

implique que toute racine ainsi retenue pour l'équation polynomiale $\mathbb{P}(t) = 0$ doit être une racine *double*!

Or, comme cette équation $\mathbb{P}(t) = 0$ est une équation *polynomiale*, elle ne possède de racines de multiplicité > 1 que si — et seulement si — son *discriminant* $\Delta_{\mathbb{P}}$ est nul.

Si $p(X) := \sum_{k=0}^{k=n} A_k X^k$ est un polynôme de degré n (et donc $A_n \neq 0$), son *discriminant* Δ_p est défini par :

$$\Delta_p := A_n^{2n-2} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

où $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est l'ensemble des n racines de l'équation $p(X) = 0$.

Comme ce discriminant est manifestement un *invariant symétrique* de l'ensemble $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$, il s'exprime toujours comme un *polynôme* en les coefficients $\{A_k\}_{0 \leq k \leq n}$ de $p(X)$. Par exemple :

$p(X)$	Δ_p
$AX^2 + 2BX + C$	$4 \cdot (B^2 - AC)$
$AX^3 + 3BX^2 + 3CX + D$	$27 \cdot \{4(B^2 - AC)(C^2 - BD) - (AD - BC)^2\}$
$AX^4 + 4BX^3 + 6CX^2 + 4DX + E$	$256 \cdot \{(AE - 4BD + 3C^2)^3 - 27(ACE - AD^2 - B^2E + 2BCD - C^3)^2\}$

Or, dans le cas présent : $\Delta_{\mathbb{P}} \in \mathbb{R}[x, y]$. Donc, une équation cartésienne de l'enveloppe d'une famille rationnelle de droites du plan est donnée par l'équation en (x, y) :

$$\Delta_{\mathbb{P}} = 0$$

Cette enveloppe est donc elle-même *toujours* une courbe *rationnelle* (ou unicursale), explicitement calculable (... sans dérivée, ni élimination).

De plus, les *coefficients* du polynôme $\mathbb{P}(t)$ étant eux-mêmes des polynômes au plus du premier degré en x et en y , le degré de cette enveloppe — c'est-à-dire le *degré* du discriminant $\Delta_{\mathbb{P}}$ — peut être très facilement majoré.

Les exemples ne manquent pas, tout en étant (un peu) longs à calculer explicitement.

Mais ...

Une enveloppe, il vaut peut-être mieux
ne pas la calculer ...

— Même si, avec le temps, c'est devenu la manière classique et usuelle de l'approcher —

En réalité, une enveloppe, il est bien plus intéressant de la *voir*!

V. Restons courbés !

Que faut-il savoir des courbes « usuelles » pour s'y retrouver, dans la jungle curviligne qui commence à nous envelopper ?

Les coniques et les formes du second degré

• D'autres points de vue . . .

Der Kegelschnitt als Erzeugnis projektivischer Gebilde. § 25, 26. 113

nur das eine Strahlbüschel R_1 drehen, das andere B dagegen unverändert lassen. Bei dieser Drehung kommen einmal g und g_1 in parallele Lage; h und h_1 laufen dann aber nicht parallel, weil bei zwei gleichlaufenden projektivischen Strahlbüscheln unmöglich gleichzeitig g mit g_1 und h mit h_1 parallel laufen kann (§ 14); drehen wir nun, mit der parallelen Lage von g und g_1 beginnend, für welche das Erzeugnis eine Parabel wird, in einem oder dem andern Drehungssinne das Strahlbüschel R_1 herum, so wird das Erzeugnis Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Richtungen von g und h durch die Richtungen von h_1 und g_1 getrennt werden oder nicht; gelangen wir endlich bei fortgesetzter Drehung in die Lage, dass h und h_1 parallel werden, so entsteht wieder eine Parabel, und weiter gedreht, geht das Erzeugnis, wenn es früher Ellipse war, in die Hyperbel über, oder umgekehrt; es gibt also zwei Gruppen von Kegelschnitten, welche bei dieser Bewegung auftreten; die eine enthält lauter Ellipsen, die andere lauter Hyperbeln; beide Gruppen werden durch zwei Parabeln von einander getrennt. Unter der Gruppe von Hyperbeln tritt einmal das Liniene paar auf, wenn die Strahlbüschel perspektivisch werden, und einmal die gleichzeitige Hyperbel, wenn s und s_1 , also auch t und t_1 parallel werden.

§ 26. Bedingungen für die Erzeugung der verschiedenen Kegelschneide durch zwei projektivische Punktreihen.

Betrachten wir anderseits das Erzeugnis zweier beliebiger projektivischer Punktreihen, so erkennen wir, dass dasselbe in Allgemeinen nur Ellipse oder Hyperbel sein kann, aber nicht Parabel; denn da die Parabel derjenige Kegelschnitt ist, welcher nur einen einzigen unendlich-fernen Punkt besitzt, so muss die unendlich-ferne Gerade G_∞ , da sie nur einen Punkt mit diesem Kegelschlütt gemein hat, ein Projektionsstrahl oder eine Tangente derselben sein; irgend zwei andere Tangenten, als Träger zweier erzeugenden Punktreihen aufgefasst, werden von der G_∞ in den unendlich-fernen Punkten getroffen, welches mithin entsprechende Punkte sein müssen. Zwei Punktreihen, deren unendlich-ferner Punkte entsprechende sind, sind aber notwendig projektivisch-ähnlich (§ 19); also sehen wir, dass eine Parabel nur von zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen

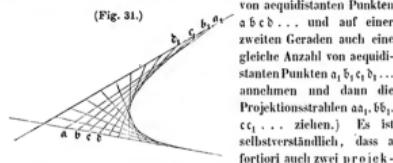
Schröter, Théorie d. Kegelsch.

8

114

Zweiter Abschnitt.

reihen erzeugt werden kann und immer erzeugt wird, sobald sich dieselben nicht in perspektivischer Lage befinden; also auch umgekehrt: Irgend zwei Tangenten einer Parabel werden von allen übrigen in zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen getroffen. (Hieraus können wir uns leicht ein anschauliches Bild der Parabel durch Zeichnung herstellen, indem wir (Fig. 31) auf einer Geraden eine Anzahl



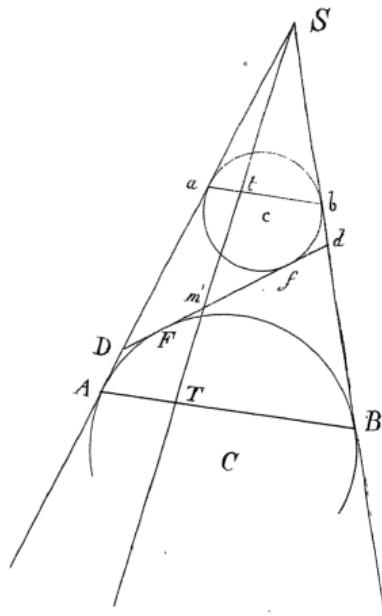
(Fig. 31) von aquidistanten Punkten a, b, c, \dots und auf einer zweiten Geraden auch eine gleiche Anzahl von sequidistanten Punkten s, t, u, v, \dots annehmen und dann die Projektionsstrahlen as, bs, cs, \dots ziehen.) Es ist selbstverständlich, dass a fortiori auch zwei projektivisch-gleiche Punktreihen immer eine Parabel erzeugen, sobald sie nicht perspektivisch liegen. Bemerken wir hierzu noch, dass die Parabel keine zwei im Endlichen »gelegene parallele Tangenten haben kann; denn hätte sie zwei parallele Tangenten und wir fästten sie als Träger zweier erzeugender Punktreihen auf, so müsste ihr Schnittpunkt, der er die beiden unendlich-fernen Punkte dieser Träger enthält und dieselben bei der Parabel entsprechende Punkte sein müssen, zwei entsprechende Punkte vereinigt haben; die Punktreihen wären also perspektivisch und die Projektionsstrahlen ließen alle durch einen Punkt, was gegen die Voraussetzung ist, dass sie eine Parabel umhüllten. Die Parabel hat also keine zwei (im Endlichen liegenden) parallelen Tangenten; anderseits kann freilich jede Tangente mit der unendlich-fernen Tangente G_∞ als parallel angesehen werden, weil ihr Schnittpunkt im Unendlichen liegt.

Um das Erzeugnis zweier beliebiger projektivischer Punktreihen, welche nicht ähnlich sind, genauer zu erkennen und insbesondere um zu erfahren, unter welchen Bedingungen dasselbe Ellipse oder Hyperbel wird, da es Parabel nicht sein kann, suchen wir auf den erzeugenden Punktreihen $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$ die den unendlich-fernen Punkten entsprechenden (d. h. die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen § 12) r und q_1 auf, und da diese selbst nicht

J. Steiner & H. Schröter
(1876)

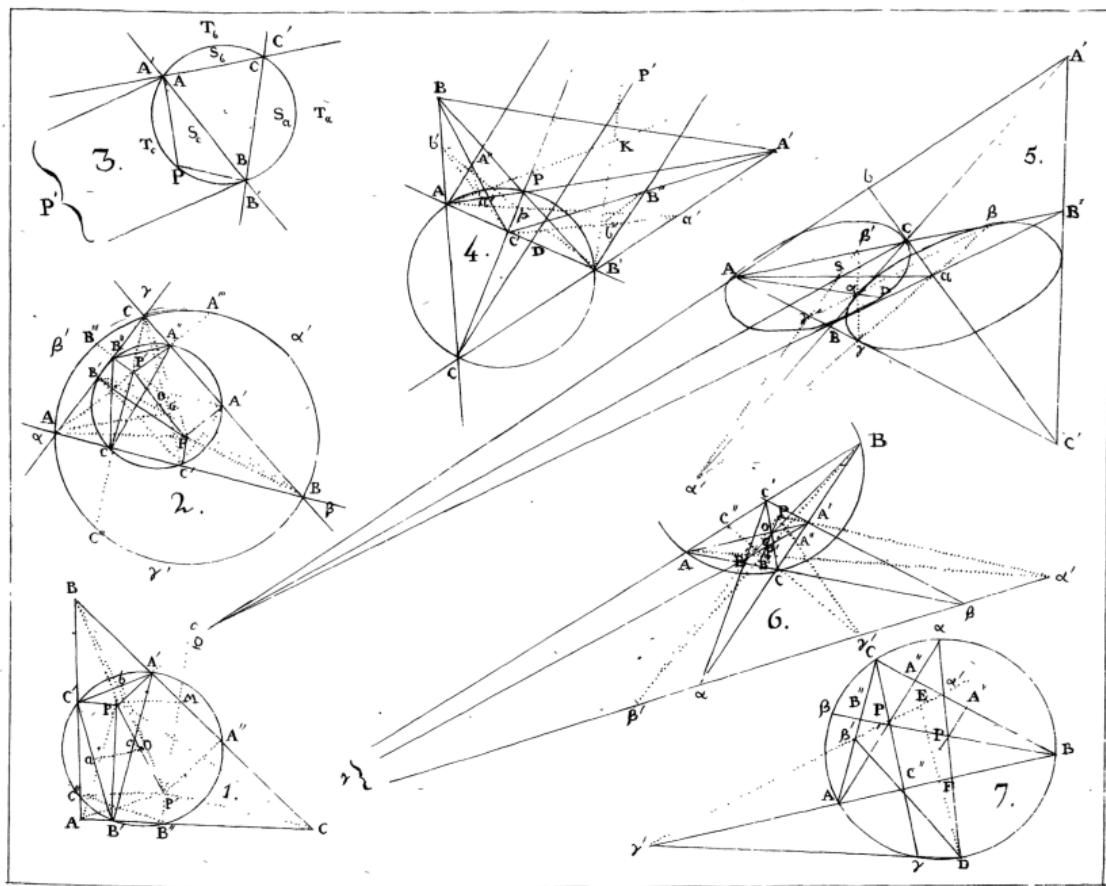
• . . Et d'autres résultats

G. Dandelin (1826)



Méth. de M^r Dandelin





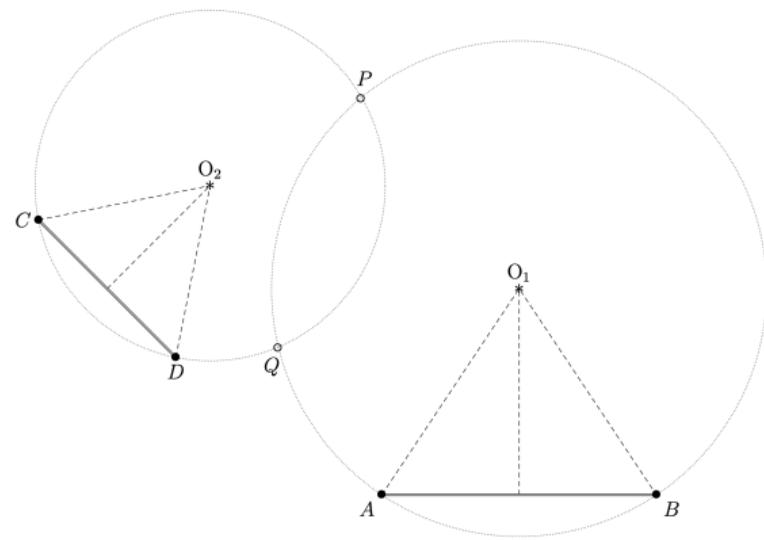
J. Steiner (1828)

Après les coniques : les cubiques, les quartiques, etc.

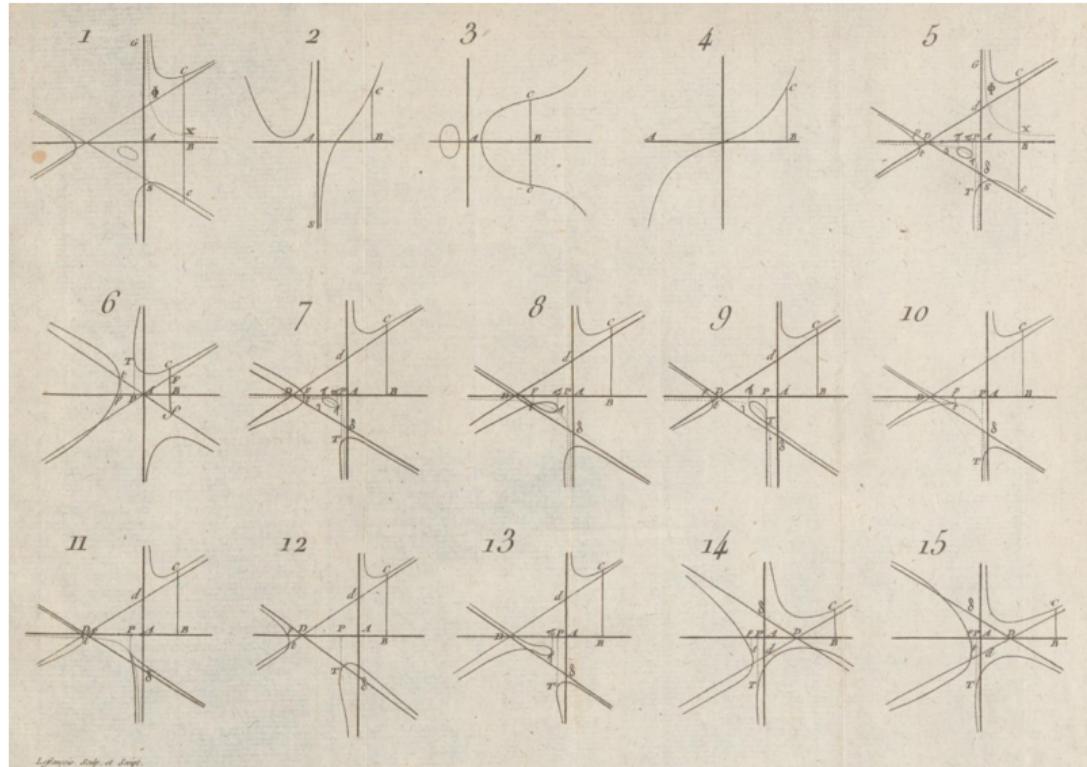
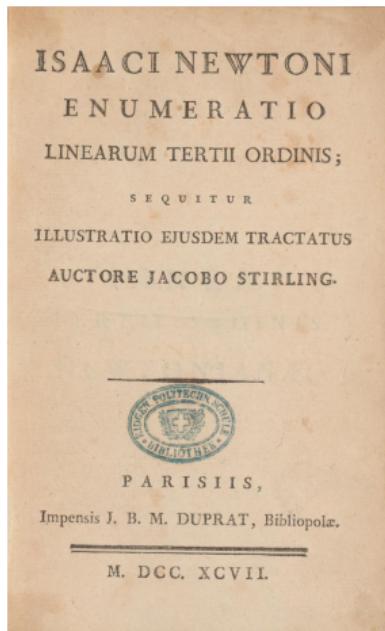
- Un exemple : les cubiques d'Apollonius

On considère deux segments $[A, B]$ et $[C, D]$.

Quel est le lieu des points d'où ces segments sont vus sous un même angle ?



• Tout un monde



I. Newton (1690-1704)

A TREATISE

ON THE

HIGHER PLANE CURVES:

INTENDED AS A SEQUEL

TO

A TREATISE ON CONIC SECTIONS.

BY

GEORGE SALMON, D.D., D.C.L., LL.D., F.R.S.,
REGIUS PROFESSOR OF DIVINITY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN.

THIRD EDITION.

Dublin:
 HODGES, FOSTER, AND FIGGIS, GRAFTON STREET,
BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.
 MDCCCLXXIX.

AN ELEMENTARY TREATISE

ON

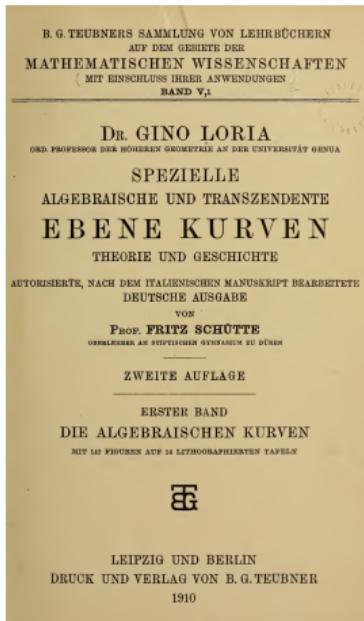
CUBIC AND QUARTIC CURVES

BY

A. B. BASSET, M.A., F.R.S.
TRINITY COLLEGE CAMBRIDGE

... Et sans parler des courbes transcendantes ...

Heureusement, il y a des herbiers !

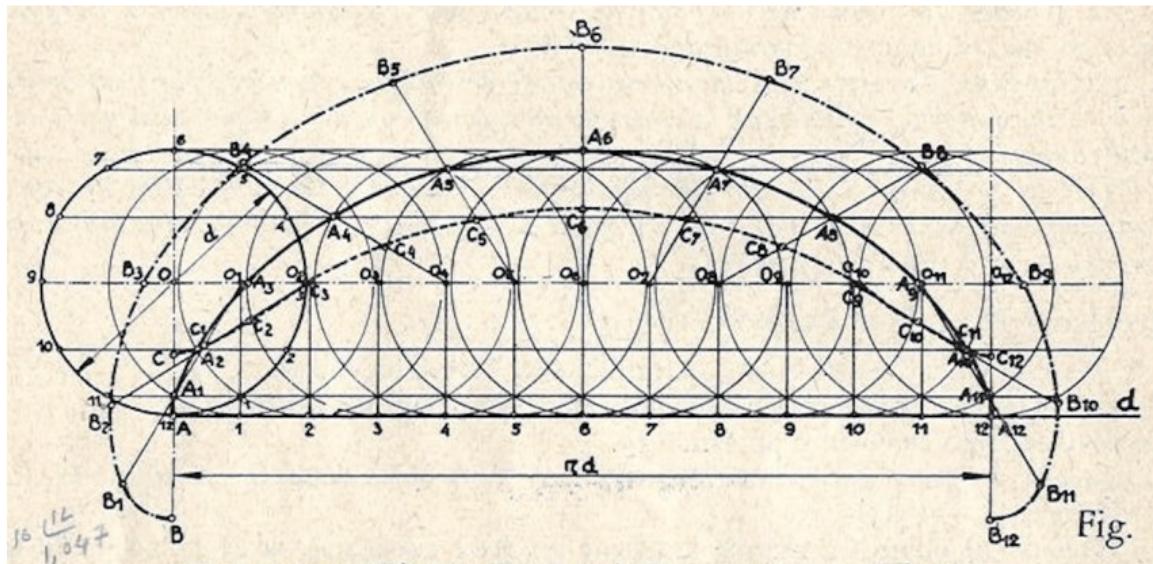


Le XIX^{ème} siècle était bien *mieux* courbé que nous, car il plongeait aussi ses courbes dans le monde projectif, et dans le monde complexe.

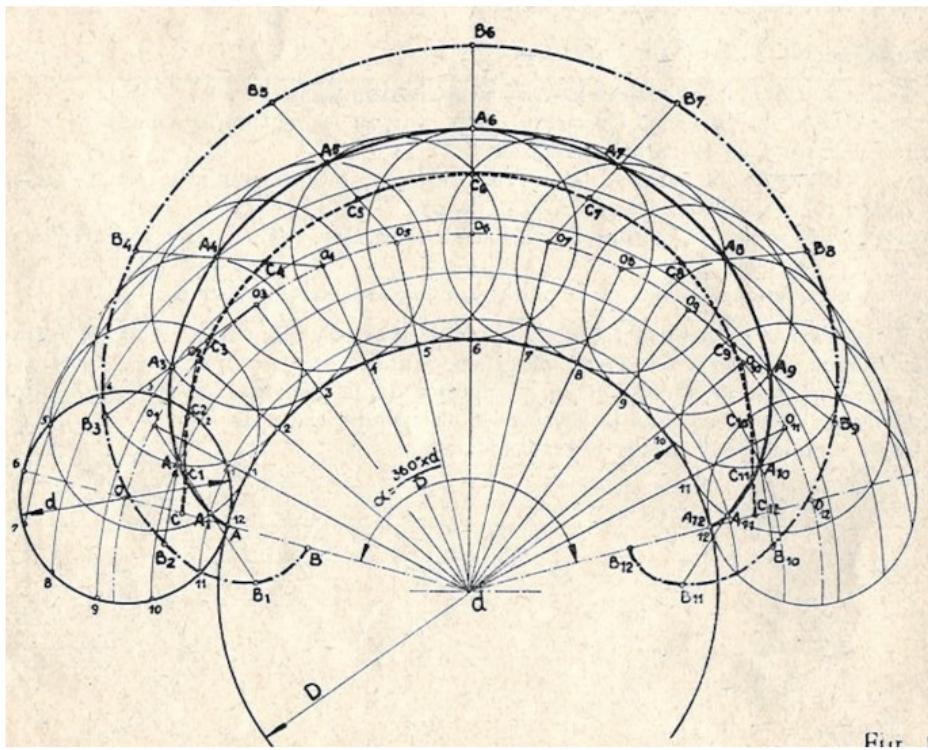
VI. Des courbes terriblement circulaires

Une revue de courbes terriblement circulaires

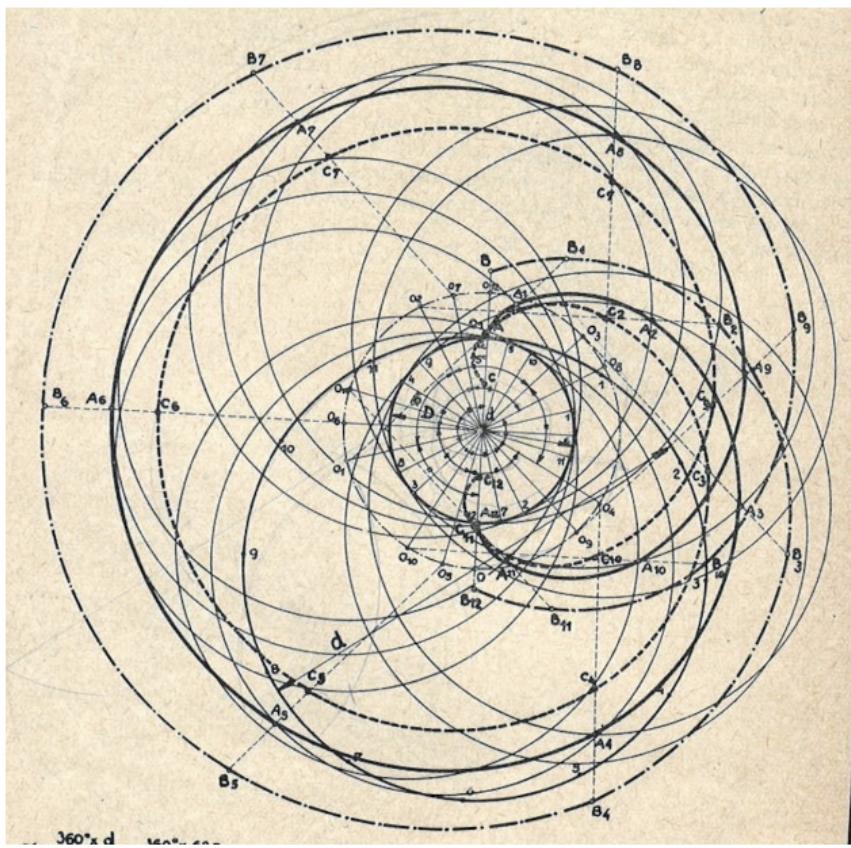
- La cycloïde, et quelques unes de ses trochoïdes



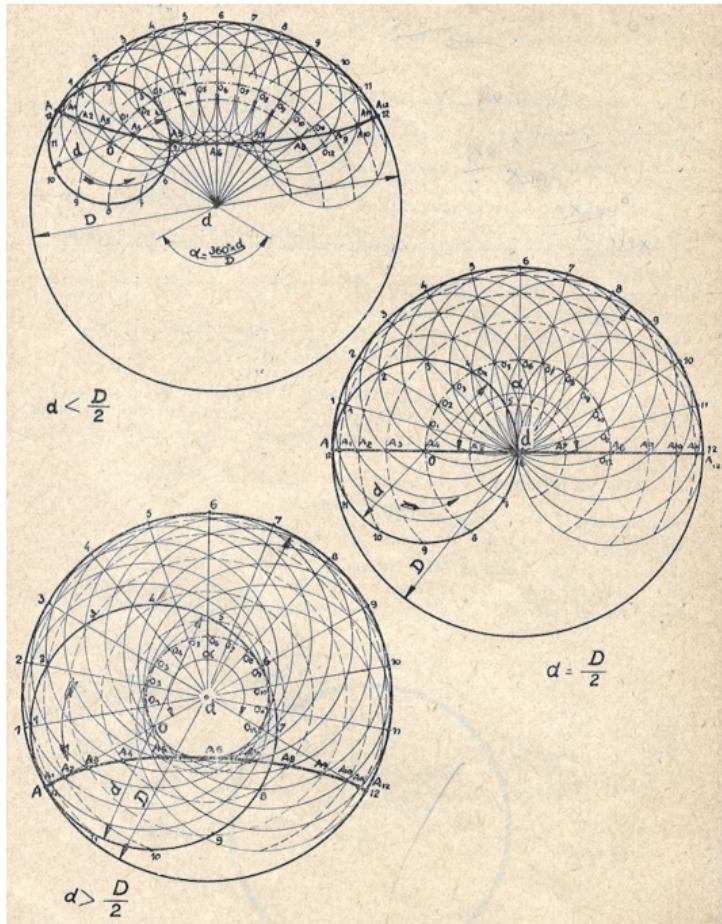
• Une épicycloïde, et quelques unes de ses trochoïdes



- Une péricycloïde, et quelques unes de ses trochoïdes



• Quelques hypocycloïdes



L'hypocycloïde en général

Les courbes telles que l'hypocycloïde sont souvent décrites d'un point de vue algébrique ou analytique. Pour les représenter sous TKZ-EUCLIDE, ce point de vue n'est pas à négliger.

- **D'abord, quelques résultats classiques . . .**

Une *hypocycloïde* est une courbe décrite par un *point* d'une circonference de rayon r , appelée la *roulante*, lorsque cette circonference roule (sans glisser . . .) sur le bord intérieur d'une autre circonference de rayon $R \geq r$, appelée la *base*.

On note :

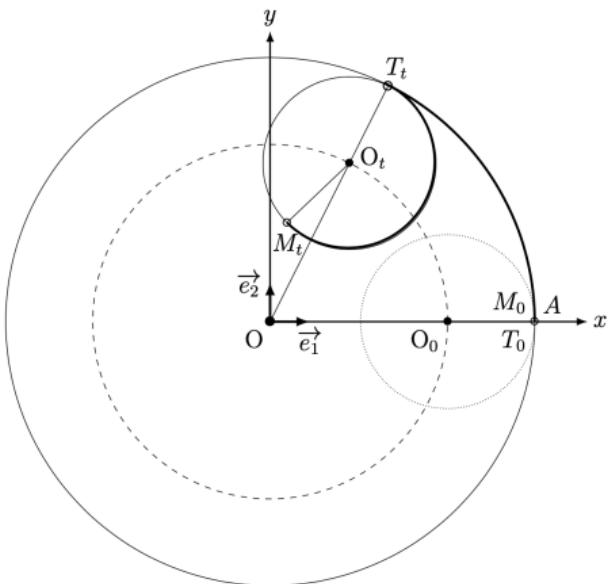
$$t = \widehat{A O T_t} \quad \text{et} \quad \mu := \widehat{T_t O_t M_t}$$

On a la *relation de compatibilité des rotations* :

$$R \cdot t = r \cdot (-\mu)$$

Des équations paramétriques pour cette courbe résultent alors de :

$$\overrightarrow{O M_t} = \overrightarrow{O O_t} + \overrightarrow{O_t M_t}$$

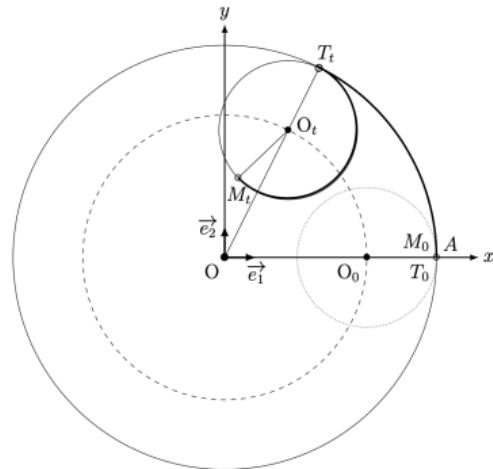


Car, en effet :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO_t} &= (R - r) \cos t \cdot \vec{e}_1 + (R - r) \sin t \cdot \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{O_t M_t} &= r \cos(t + \mu) \cdot \vec{e}_1 + r \sin(t + \mu) \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM_t} = \{(R - r) \cos t + r \cos(t + \mu)\} \cdot \vec{e}_1 + \{(R - r) \sin t + r \sin(t + \mu)\} \cdot \vec{e}_2$$



Et donc, suivant la *relation de compatibilité des rotations* :

$$\overrightarrow{OM_t} = \left\{ (R - r) \cos t + r \cos \left(\frac{R - r}{r} \cdot t \right) \right\} \cdot \vec{e}_1 + \left\{ (R - r) \sin t - r \sin \left(\frac{R - r}{r} \cdot t \right) \right\} \cdot \vec{e}_2$$

Les équations paramétriques de l'hypocycloïde sont donc :

$$\begin{cases} x &= x_{M_t} = (R - r) \cos t + r \cos \left(\frac{R - r}{r} \cdot t \right) \\ y &= y_{M_t} = (R - r) \sin t - r \sin \left(\frac{R - r}{r} \cdot t \right) \end{cases}$$

• . . . Et quelques cas particuliers

* Si $R = r$, il ne se passe rien !

* Si $R = 2r$:

$$\begin{cases} x &= \frac{R}{2} \cos t + \frac{R}{2} \cos t = R \cos t \\ y &= \frac{R}{2} \sin t - \frac{R}{2} \sin t = 0 \end{cases}$$

L'hypocycloïde est alors *réduite* à un *diamètre* du « grand » cercle.

* Si $R = 3r$:

$$\begin{cases} x &= \frac{2R}{3} \cos t + \frac{R}{3} \cos 2t = \frac{R}{3} \{2 \cos t + \cos 2t\} \\ y &= \frac{2R}{3} \sin t - \frac{R}{3} \sin 2t = \frac{R}{3} \{2 \sin t - \sin 2t\} \end{cases}$$

Si $t = 0, \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$, on retrouve les coordonnées de points situés sur le « grand » cercle.
 (Ce sont aussi les coordonnées des trois points de rebroussement . . .)

* Si $R = 4r$:

$$\begin{cases} x &= \frac{3R}{4} \cos t + \frac{R}{4} \cos 3t = \frac{R}{4} \{3 \cos t + \cos 3t\} \\ y &= \frac{3R}{4} \sin t - \frac{R}{4} \sin 3t = \frac{R}{4} \{3 \sin t - \sin 3t\} \end{cases}$$

Comme on a aussi :

$$\begin{cases} 3 \cos t + \cos 3t &= 4 \cos^3 t \\ 3 \sin t - \sin 3t &= 4 \sin^3 t \end{cases}$$

on retrouve donc l'*astroïde*, comme hypocycloïde à 4 points de rebroussement.

• La caractérisation (algébrique) de la tangente en un point de l'hypocycloïde

On note \mathfrak{T}_t la droite tangente à l'hypocycloïde en son point M_t . On calcule :

$$\begin{cases} \frac{dx_{M_t}}{dt} = \dots = -2(R-r) \sin\left(\frac{R}{2r} \cdot t\right) \cos\left(\frac{2r-R}{2r} \cdot t\right) \\ \frac{dy_{M_t}}{dt} = \dots = -2(R-r) \sin\left(\frac{R}{2r} \cdot t\right) \sin\left(\frac{2r-R}{2r} \cdot t\right) \end{cases}$$

Tant que $2(R-r) \sin\left(\frac{R}{2r} \cdot t\right) \neq 0$, on peut donc définir un vecteur directeur $\vec{\varepsilon}_{\mathfrak{T}_t}$ de \mathfrak{T}_t par :

$$\vec{\varepsilon}_{\mathfrak{T}_t} := \cos\left(\frac{2r-R}{2r} \cdot t\right) \cdot \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{2r-R}{2r} \cdot t\right) \cdot \vec{e}_2$$

D'autre part, on calcule aussi :

$$\overrightarrow{T_t M_t} = \overrightarrow{T_t O_t} + \overrightarrow{O_t M_t} = \dots = 2r \sin\left(\frac{R}{2r} \cdot t\right) \cdot \left\{ \sin\left(\frac{2r-R}{2r} \cdot t\right) \cdot \vec{e}_1 - \cos\left(\frac{2r-R}{2r} \cdot t\right) \cdot \vec{e}_2 \right\}$$

Un calcul immédiat de produit scalaire implique alors que :

$$d_{T_t M_t} \perp \mathfrak{T}_t$$

Exemple d'un calcul de tangente pour $R = 3r$ (l'hypocycloïde à trois points de rebroussement) :

$$\overrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{T}_t}} := \cos \frac{t}{2} \cdot \vec{e}_1 - \sin \frac{t}{2} \cdot \vec{e}_2$$

De manière générale, on déduit aussi des formules générales précédentes :

$$\|\overrightarrow{T_t M_t}\| = 2r \cdot \left| \sin \frac{R}{2r} t \right|$$

On retrouve ainsi les valeurs du paramètre t pour lesquelles les points T_t et M_t coïncident, puisque :

$$\overrightarrow{T_t M_t} = \vec{0} \iff \sin \frac{R}{2r} t = 0 \iff t = \frac{r}{R} \cdot 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• La caractérisation (algébrique) des points de rebroussement de l'hypocycloïde

Il s'agit de montrer que la droite \mathfrak{T}_t , tangente à l'hypocycloïde en chaque valeur t de l'angle de déplacement, telle que $T_t = M_t$, y est aussi *normale* à la « grande » circonférence en ce(s) point(s).

Or, si $t \rightarrow \frac{r}{R} \cdot 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a alors :

$$\frac{2r - R}{2r} \cdot t \rightarrow \frac{2r - R}{2r} \cdot \frac{r}{R} \cdot 2k\pi = \frac{2r - R}{R} \cdot k\pi = \frac{2r}{R} \cdot k\pi - k\pi$$

d'où :

$$\overrightarrow{\varepsilon_{T_t}} \rightarrow \begin{cases} + \left\{ \cos\left(\frac{2r}{R} \cdot k\pi\right) \cdot \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{2r}{R} \cdot k\pi\right) \cdot \vec{e}_2 \right\} & \text{si } k \text{ est pair} \\ - \left\{ \cos\left(\frac{2r}{R} \cdot k\pi\right) \cdot \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{2r}{R} \cdot k\pi\right) \cdot \vec{e}_2 \right\} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Par ailleurs, on a alors aussi, et évidemment :

$$\overrightarrow{OT_t} := R \left\{ \cos t \cdot \vec{e}_1 + \sin t \cdot \vec{e}_2 \right\} \rightarrow R \left\{ \cos\left(\frac{r}{R} \cdot 2k\pi\right) \cdot \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{r}{R} \cdot 2k\pi\right) \cdot \vec{e}_2 \right\}$$

Le vecteur directeur de la tangente \mathfrak{T}_t devient donc bien proportionnel au vecteur $\overrightarrow{OT_t}$ dès que $M_t = T_t$.

• Une hypocycloïde est-elle une courbe rationnelle ?

Toute hypocycloïde telle que :

$$\frac{R-r}{r} \in \mathbb{Q}$$

admet (aussi) une représentation paramétrique rationnelle, moyennant le recours à $T := \tan \frac{t}{2}$.

→ **Une équation cartésienne explicite pour l'hypocycloïde à trois points de rebroussement**

Si $R = 3r$, partant des équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= \frac{R}{3} \{2 \cos t + \cos 2t\} \\ y &= \frac{R}{3} \{2 \sin t - \sin 2t\} \end{cases}$$

on observe d'abord que :

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{9} (5 + 4 \cos 3t)$$

d'où, grâce à $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$, une équation en puissances de $\cos t$:

$$4 \cos^3 t - 3 \cos t = \frac{9(x^2 + y^2) - 5R^2}{4R^2}$$

D'autre part, la première des équations paramétriques peut aussi s'écrire uniquement en termes de $\cos t$:

$$2\cos^2 t + 2\cos t - \left(1 + \frac{3x}{R}\right) = 0$$

Mais c'est là une équation du second degré en $\cos t$, d'où :

$$\cos t = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{où} \quad \Delta := \frac{3(R+2x)}{R}$$

Tout cela donne alors naissance à l'équation en x et y :

$$4\left(\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}\right)^3 - 3\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{9(x^2 + y^2) - 5R^2}{4R^2}$$

qu'il faut encore rendre rationnelle. On obtient d'abord :

$$\pm \sqrt{\left\{\frac{3(R+2x)}{R}\right\}^3} = 9 \cdot \frac{x^2 + y^2 + R^2 + 4Rx}{2R^2}$$

Et enfin, à force de (petits) calculs :

$$3(x^2 + y^2)^2 + 6R^2(x^2 + y^2) - 8Rx(x^2 - 3y^2) - R^4 = 0$$

Une hypocycloïde à trois points de rebroussement est donc une *courbe algébrique rationnelle du quatrième degré*.

L'hypocycloïde à 3 points de rebroussement, ou deltoïde

On en revient au **Théorème Extraordinaire** !

Pour comprendre la géométrie à l'œuvre dans ce **Théorème Extraordinaire**, il faut disposer d'une compréhension géométrique de la courbe terriblement circulaire qui y apparaît : l'hypocycloïde à 3 points de rebroussement, ou deltoïde.

Bien sûr, on vient d'en obtenir — algébriquement ! — plusieurs propriétés importantes.

Mais on se propose maintenant de redémontrer certaines de ces propriétés et surtout, d'en découvrir de nouvelles, certaines très surprenantes.

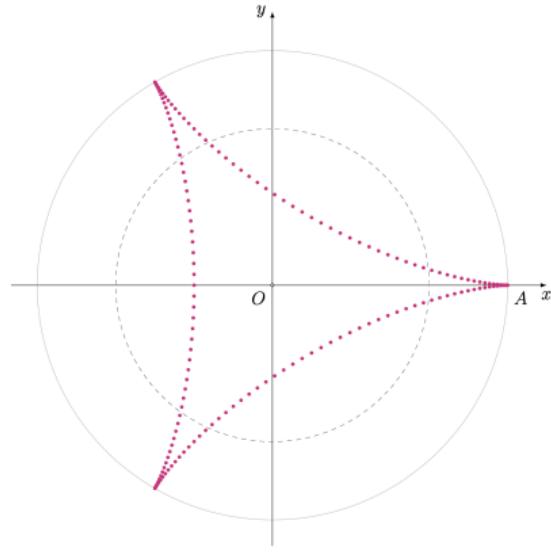
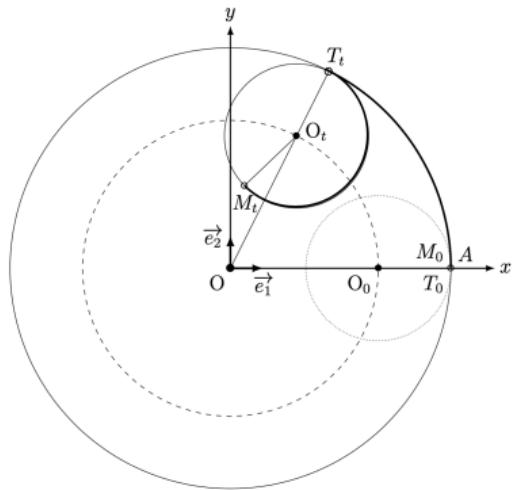
Et uniquement en termes de géométrie élémentaire.

Une hypocycloïde à 3 points de rebroussement — notée désormais \mathcal{H}_3 — est l'hypocycloïde pour laquelle le rayon R de la base est égal au triple de celui, noté r , de la roulante :

$$R = 3 \cdot r$$

• La génération ponctuelle

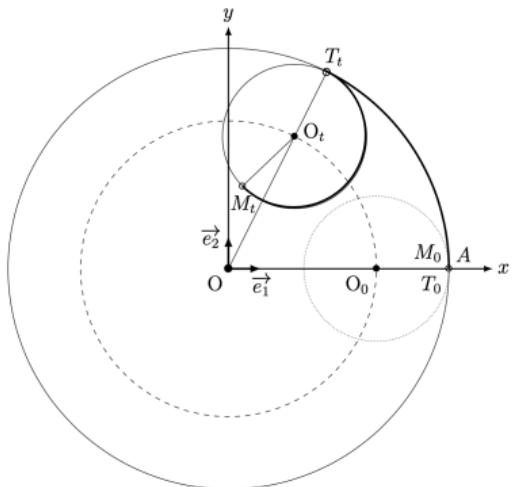
En traduisant la définition précédente sous TKZ-EUCLIDE, on construit facilement une \mathcal{H}_3 , en faisant apparaître un ensemble suffisamment complet de ses *points*. Voir tkz-euclide



Or, si une \mathcal{H}_3 doit apparaître comme solution d'un problème d'enveloppe, il faut comprendre comment elle est engendrée — non pas en termes de points — mais bien en termes de *droites tangentes*!

• Le retour de la tangente

On commence par fixer une fois pour toutes les notations.



- t : l'angle (orienté) $\widehat{AOO_t} = \widehat{AO T_t}$ de déplacement.
- O_t : la position du centre de la roulante, pour la valeur t de l'angle de déplacement.
- T_t : la position du point de contact entre base et roulante, pour la valeur t de l'angle de déplacement.
- M_t : la position du point décrivant l'hypocycloïde, pour la valeur t de l'angle de déplacement.

On a donc aussi :

$$|OO_t| = 2 \cdot |O_t T_t| = 2 \cdot |O_t M_t|$$

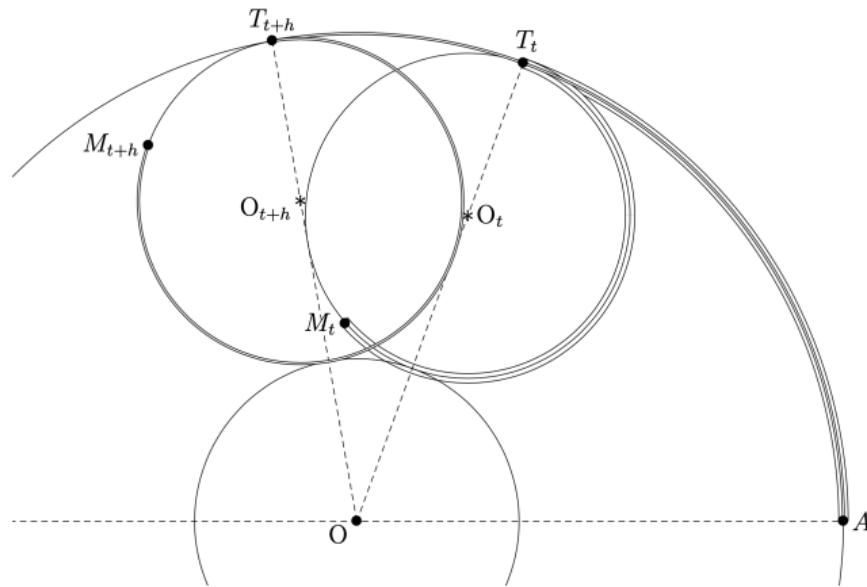
et :

$$\widehat{T_t O_t M_t} = -3t$$

Le résultat suivant a déjà été établi algébriquement. Mais sa preuve géométrique est instructive, parce qu'elle est (très) généralisable.

Proposition

Quelle que soit la valeur de l'angle t , la tangente à l'hypocycloïde en son point M_t est perpendiculaire à la droite $d_{M_t T_t}$ qui joint ce point au point de contact entre base et roulante.



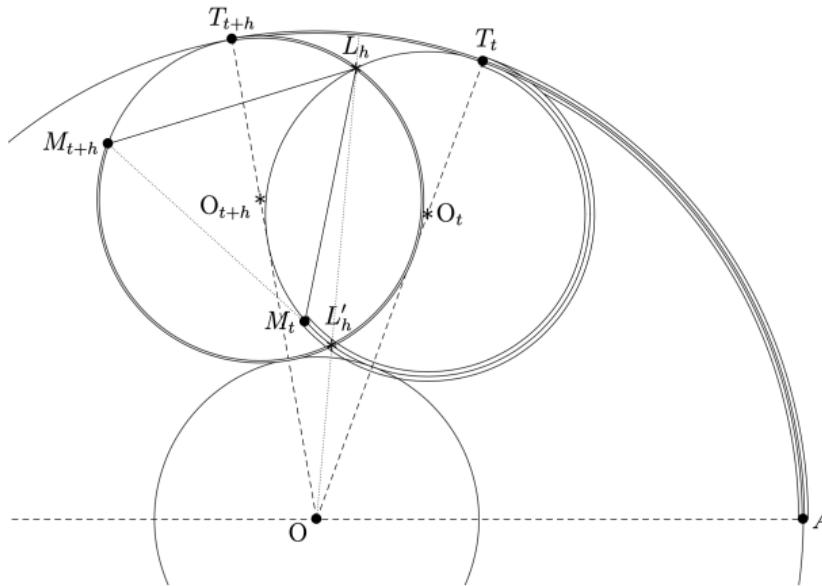
Démonstration.

Si on note :

$$h := \widehat{T_t O T_{t+h}}$$

il s'agit de montrer que :

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} d_{M_t M_{t+h}} \right) \perp d_{M_t T_t}$$



La droite $d_{L_h L'_h}$ est la droite joignant les deux points d'intersection L_h et L'_h des roulantes de centre O_t et O_{t+h} . On a donc :

$$\frac{h}{2} = \widehat{T_t O L_h} = \widehat{L_h O T_{t+h}}$$

On vérifie alors que, pour $h \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} T_{t+h} & \rightarrow T_t \\ L_h & \rightarrow T_t \\ O_{t+h} & \rightarrow O_t \\ M_{t+h} & \rightarrow M_t \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{M_t L_h M_{t+h}} = \widehat{M_t T_t M_t} = 0$$

et :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |L_h M_{t+h}| = |T_t M_t| = \lim_{h \rightarrow 0} |L_h M_t|$$

Pour $h \rightarrow 0$, le triangle $M_{t+h}L_hM_t$ tend donc à devenir quasi-isocèle, et d'angle au sommet nul . . . ■

On peut être plus précis ! Calculant à partir des *valeurs absolues* des angles, et posant : $|\widehat{OO_t L'_h}| =: \psi$ et $|\widehat{L_h O_t T_t}| =: \chi$, on obtient les résultats suivants (en supposant $h \geq 0$).

* Au départ du losange $L_h O_t L'_h O_{t+h}$: $\chi = \psi + h$.

* Grâce au triangle $OO_t O_{t+h}$:

$$2 \cdot \sin \frac{h}{2} = \sin \frac{\psi + \chi}{2}$$

* On en déduit que : $h \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi & \rightarrow 0 \\ \chi & \rightarrow 0 \end{cases}$

* On calcule ensuite :

$$\widehat{L_h O_t M_t} = 2\pi - 3t - \chi$$

$$\widehat{L_h O_{t+h} M_{t+h}} = 2\pi - 3(t + h) + \chi$$

ce qui établit la *quasi-isométrie* des triangles *isocèles* $L_h O_t M_t$ et $L_h O_{t+h} M_{t+h}$.

* Enfin, on a : $M_t \widehat{L_h M_{t+h}} = O_t \widehat{L_h O_{t+h}} - O_t \widehat{L_h M_t} + O_{t+h} \widehat{L_h M_{t+h}} = \dots = \chi + \frac{h}{2} = \psi + \frac{3h}{2}$. Dès lors ...

Les calculs précédents montrent que, contrairement aux apparences, il *n'y a pas* de rotation de centre L_h qui amène le triangle isocèle $L_hO_tM_t$ sur le triangle isocèle $L_hO_{t+h}M_{t+h}$!

Du moins tant que $h \neq 0$.

Mais on n'en est pas loin, de cette rotation, ... on s'en rapproche ...

En réalité (!), cette rotation n'apparait vraiment qu'à *la limite*, c'est-à-dire ... lorsque les triangles isocèles n'existent plus.

Et on dit alors que — pour chaque valeur de l'angle de déplacement t — le point T_t est le *centre instantané de rotation* pour le déplacement de la rouleau sur sa base.

• La génération tangentielle de l' \mathcal{H}_3

On note désormais Γ_t la roulante (ponctuelle) pour la valeur t de l'angle de déplacement.

Si $M_t \in \Gamma_t \cap \mathcal{H}_3$, et si $\{T_t, C_t\} = d_{O\Gamma_t} \cap \Gamma_t$, alors :

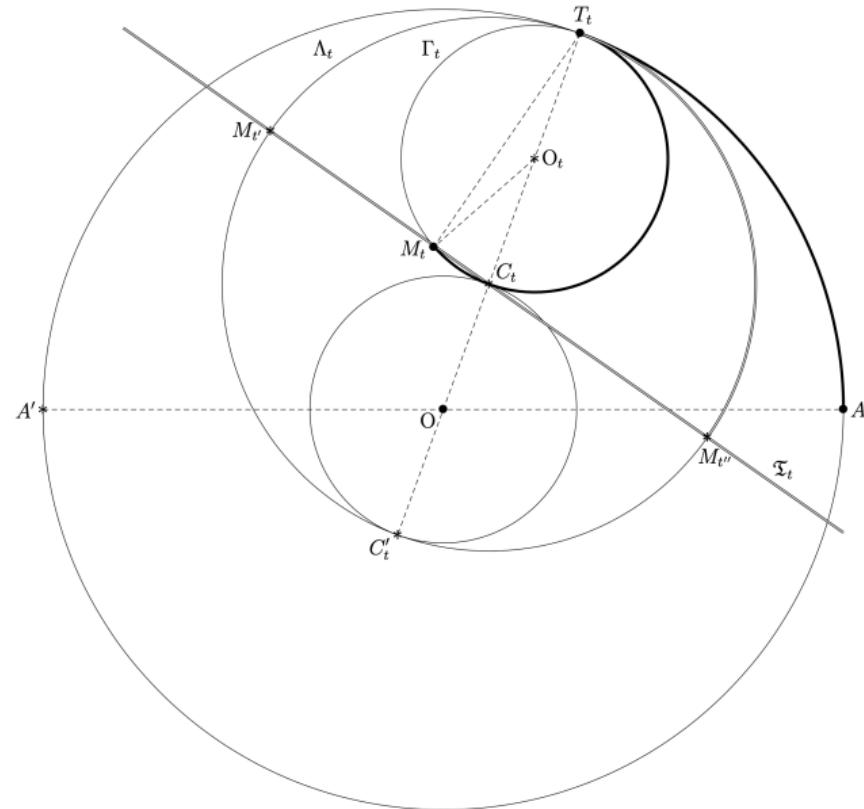
$$d_{C_t M_t} \perp d_{T_t M_t}$$

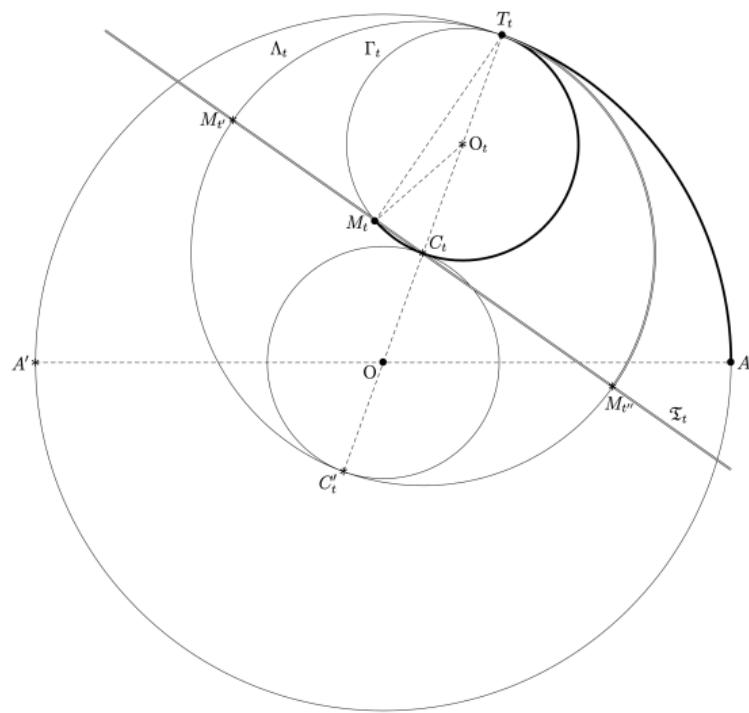
puisque la droite $d_{T_t C_t}$ définit un *diamètre* de cette roulante Γ_t .

La tangente \mathfrak{T}_t à l'hypocycloïde \mathcal{H}_3 en son point M_t doit donc aussi être un *diamètre* du cercle Λ_t de centre C_t et de rayon $2r$.

De plus, on calcule alors :

$$\widehat{T_t C_t M_{t''}} = \pi - \widehat{M_t C_t T_t} = \dots = \frac{1}{2} \widehat{M_t O_t T_t}$$





Autrement dit, les arcs $(T_t A)$, $(T_t M_{t''})$ et $(T_t M_t)$ sont toujours, tous les trois, de *même* longueur :

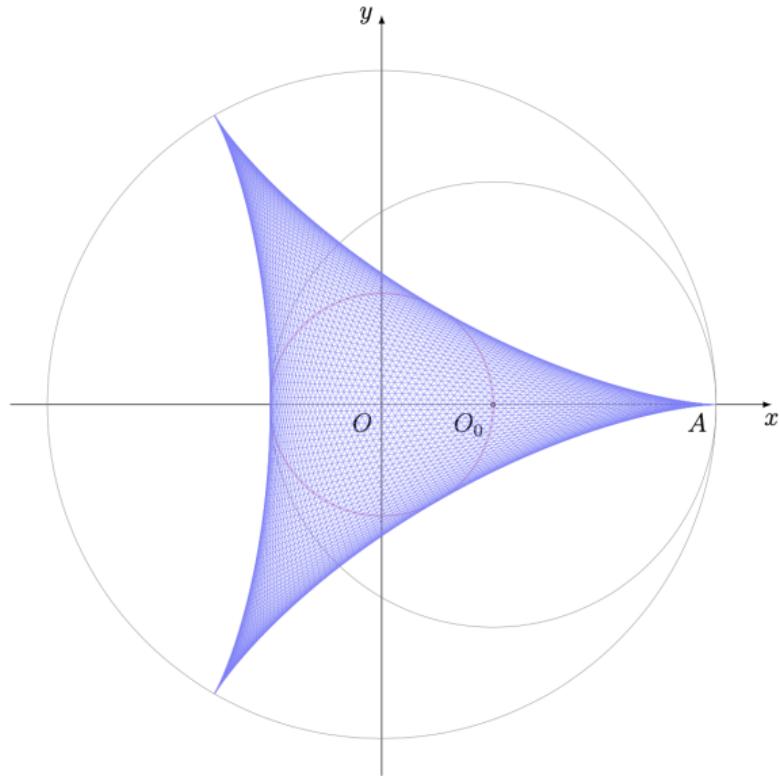
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{arc}(T_t A) & = & 3r \cdot t \\ \text{arc}(T_t M_{t''}) & = & 2r \cdot \frac{3t}{2} \\ \text{arc}(T_t M_t) & = & r \cdot 3t \end{array} \right.$$

On peut alors *redéfinir* l'hypocycloïde à 3 points de rebroussements en termes de ses tangentes, c'est-à-dire comme *enveloppe d'une famille de droites*.

Cette génération tangentiale de l' \mathcal{H}_3 — en termes de *tangentes*! — justifie que la courbe possède 3 points de *rebroussement*.

Une *hypocycloïde* est donc (aussi) une courbe décrite par un *diamètre* attaché à une circonférence de rayon $2r$ — appelée sa *roulante (tangentielle)* — lorsque cette circonférence roule (sans glisser ...) sur le bord intérieur d'une autre circonférence de rayon $R = 3r$, appelée sa *base*.

- La génération tangentielle de l' \mathcal{H}_3 , vue par TKZ-EUCLIDE



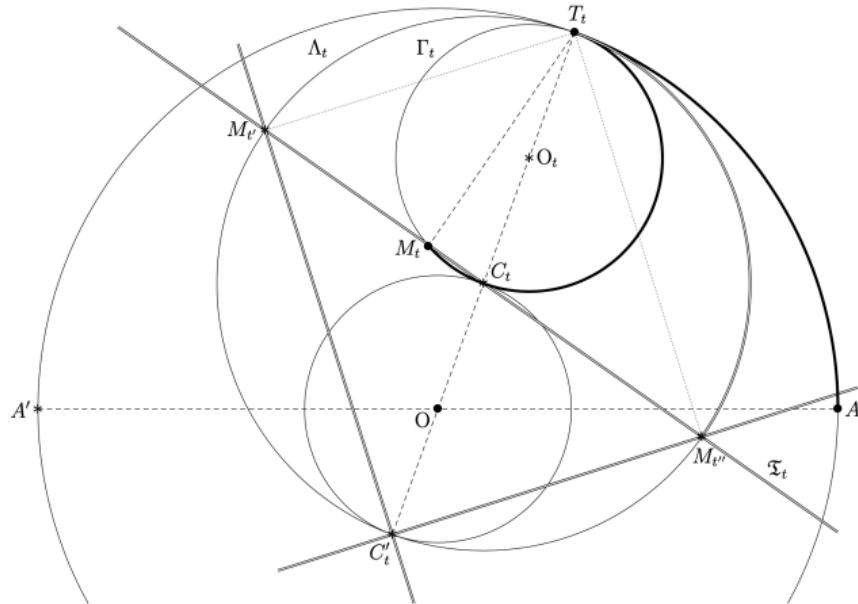
Voir tkz-euclide

J.-M. Desbonne & P. Tilleul

L'informatique et la géométrie dans l'enveloppe

• La géométrie de l' \mathcal{H}_3 comme enveloppe de droites

Théorème de l' \mathcal{H}_3



1° Si, quelle que soit la valeur de l'angle de déplacement t , on note :

$$\{M_{t'}, M_{t''}\} := \mathfrak{T}_t \cap \Lambda_t$$

alors ces deux points $M_{t'}$ et $M_{t''}$ sont situés sur l' \mathcal{H}_3 .

2° Si $\mathfrak{T}_{t'}$ et $\mathfrak{T}_{t''}$ désignent les tangentes à l' \mathcal{H}_3 associées aux points $M_{t'}$ et $M_{t''}$, alors :

$$\mathfrak{T}_{t'} \perp \mathfrak{T}_{t''}$$

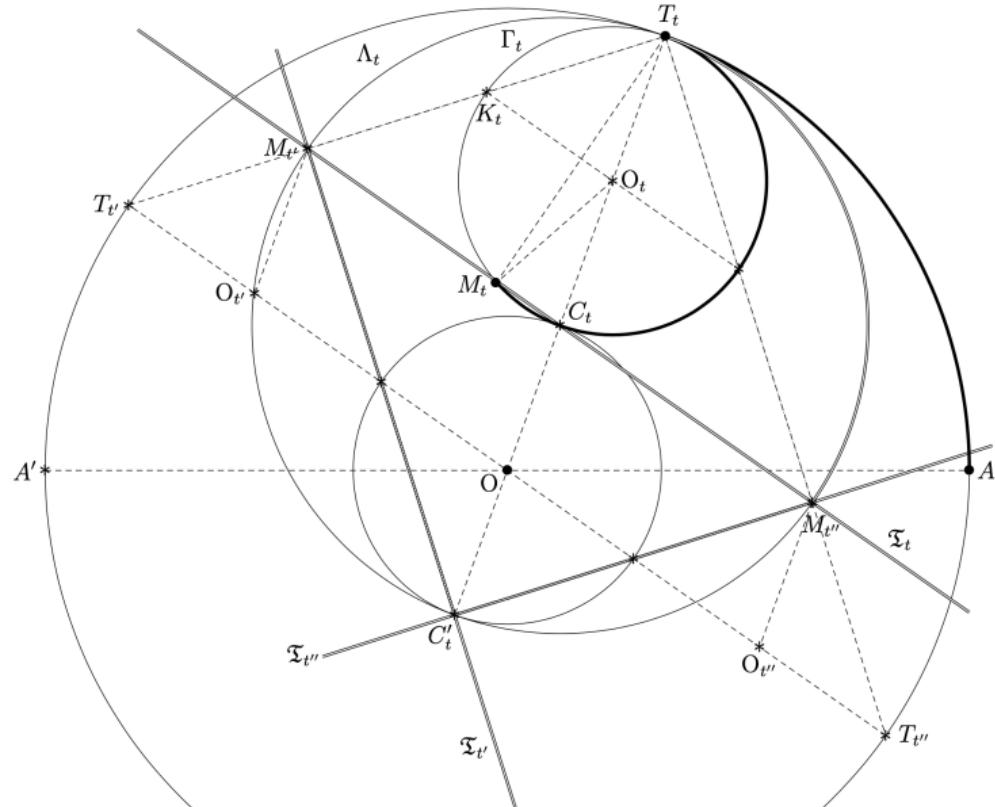
3° Le point d'intersection C'_t des tangentes $\mathfrak{T}_{t'}$ et $\mathfrak{T}_{t''}$ est toujours situé sur le petit cercle central, de centre O et de rayon r .

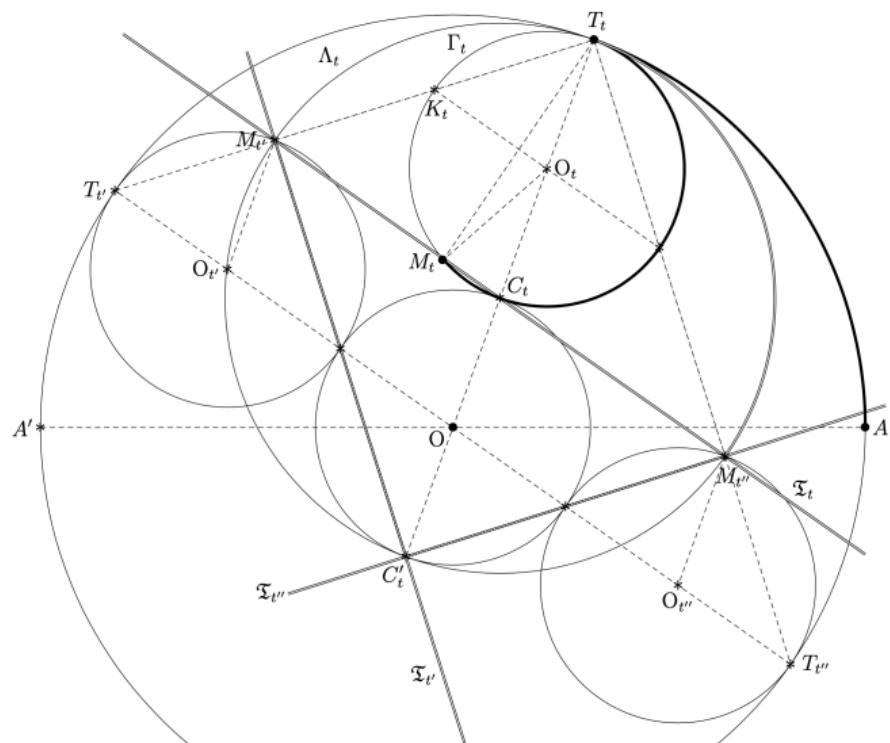
Démonstration (résumée).

La tangente \mathfrak{T}_t étant aussi un diamètre de la roulante tangentielle, l'angle $M_{t'} T_t M_{t''}$ est un angle droit.

On dispose aussi de plusieurs homothéties, toutes de centre T_t , par exemple : celle de facteur 2 qui envoie O_t sur C_t , celle de facteur 3 qui envoie O_t sur O , etc.

Cela permet de justifier déjà une bonne part de l'énoncé, ... sauf le fait que les points $M_{t'}$ et $M_{t''}$ soient situés sur l'hypocycloïde.





On a donc bien :

$$\text{arc}(AT_{t'}) - \text{arc}(T_{t'}M_{t'}) = r \cdot 2\pi$$

Pour cela, il faut faire des calculs d'angles, et vérifier par exemple la compatibilité de la position de $M_{t'}$ relativement à celle de $T_{t'}$. Or, comme $d_{K_t O_t} \perp d_{T_t M_t}$, on a :

$$\frac{\pi}{2} - \widehat{K_t O_t T_t} = \frac{1}{2} \cdot (3t - \pi)$$

d'où :

$$\widehat{K_t O_t T_t} = \pi - \frac{3t}{2}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \text{arc}(AT_{t'}) &= 3r \cdot t + 3r \cdot \left(\pi - \frac{3t}{2}\right) \\ &= r \cdot \left(3\pi - \frac{3t}{2}\right) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\text{arc}(T_{t'}M_{t'}) = r \cdot \left(\pi - \frac{3t}{2}\right)$$

On peut reformuler un des résultats du **Théorème de l' \mathcal{H}_3** de la manière suivante.

A l'exception des tangentes en un point de rebroussement, toute tangente en un point d'une hypocycloïde à 3 points de rebroussement est recoupée par celle-ci en deux autres points. La longueur du segment de tangente déterminé par ces deux points d'intersection est constante, et égale à $2r$.

N.B. Cela reste vrai pour les tangentes en un point de rebroussement, *mutatis mutandis*.

Un exercice, et une autre vision de l' \mathcal{H}_3

Voici une situation qui peut se traiter géométriquement avec des outils très analogues à ceux qui viennent d'être décrits.

• La notion de (droite) pseudo-Wallace

On se donne deux axes, sécants en un point O.

Dès que M est un point du plan, on appelle *pseudo-Wallace* de ce point M — et on note w_M — la droite déterminée par les projections orthogonales de ce point M sur les deux axes en question.

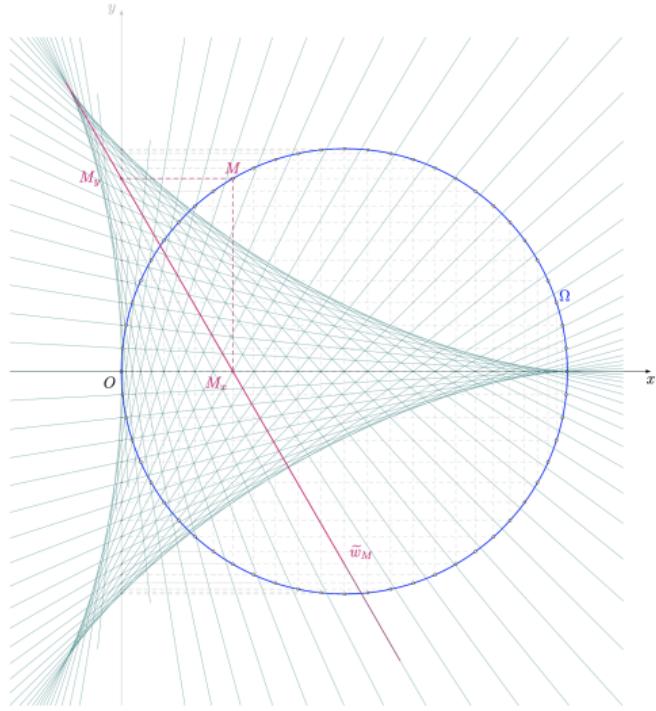
Si le point M parcourt une courbe Ω dans le plan — appelée désormais *courbe-directrice* — l'ensemble des pseudo-Wallaces des points de cette courbe constitue une famille (à un paramètre) de droites du plan.

Et sans surprise, on peut donc s'intéresser aux courbes- enveloppes de pseudo-Wallaces associées à l'une ou l'autre courbe-directrice bien choisie ...

• Un exercice

Si les deux axes sont *orthonormés*, et la courbe directrice est un *cercle* de centre sur un des axes et tangent à l'autre axe, quelle est l'enveloppe des pseudo-Wallaces correspondantes ?

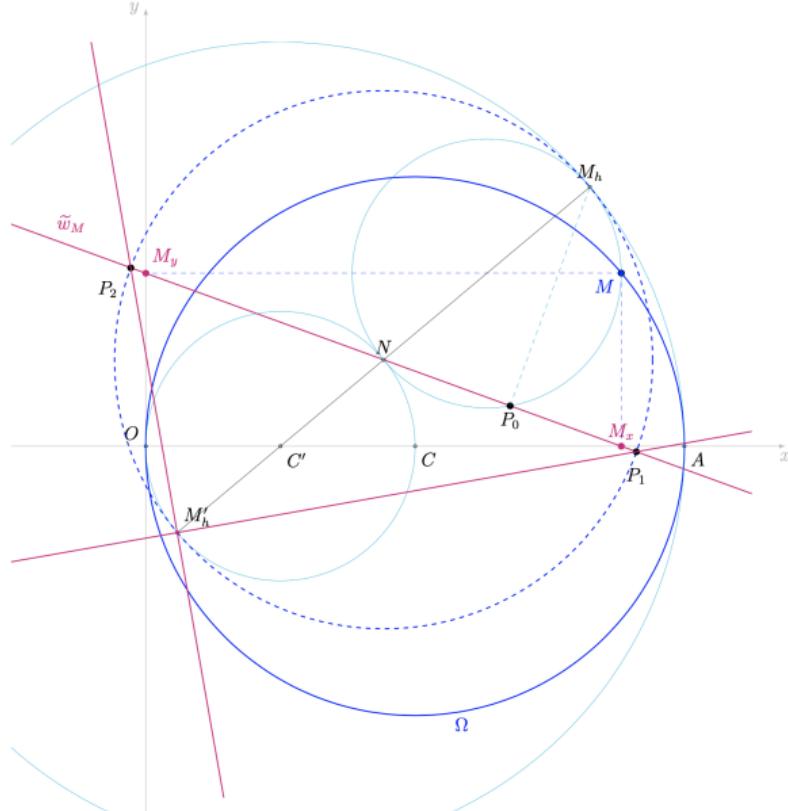
TKZ-EUCLIDE suggère une solution . . .



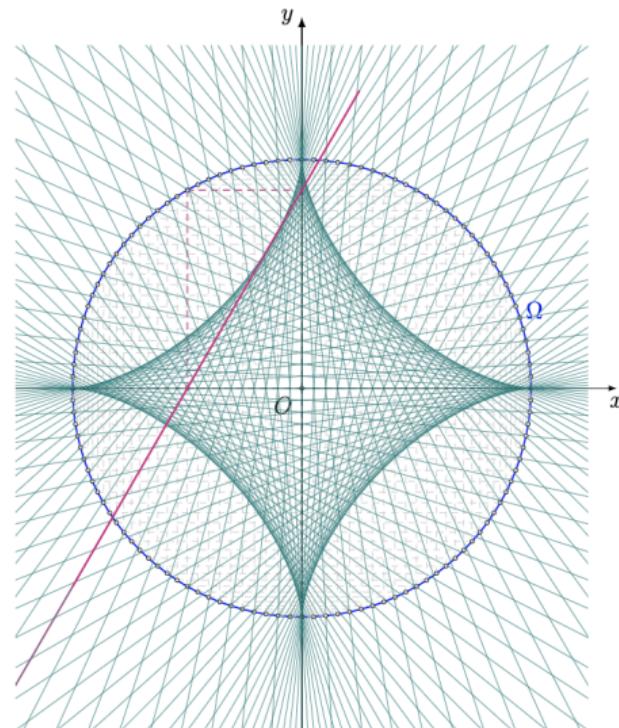
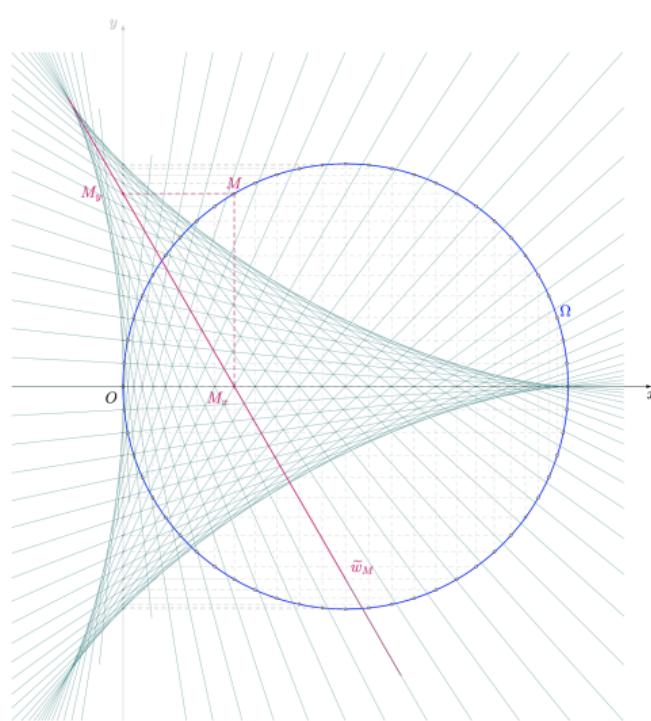
Mais il s'agit d'être sûr et certain — de savoir *pourquoi*, géométriquement parlant — il s'agit bien d'une hypocycloïde à 3 points de rebroussement ?

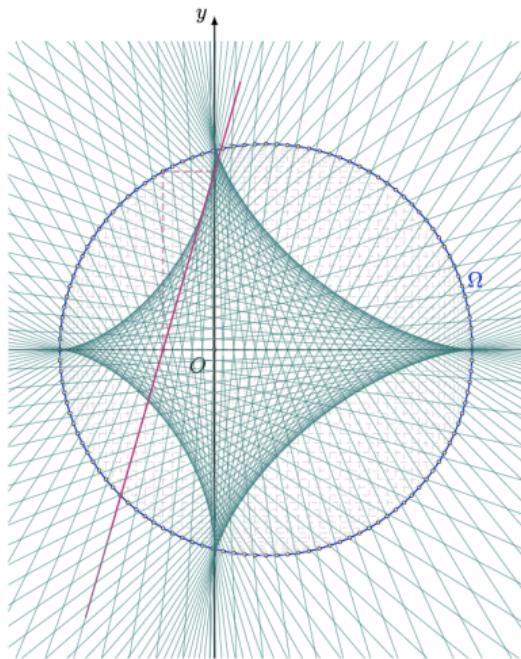
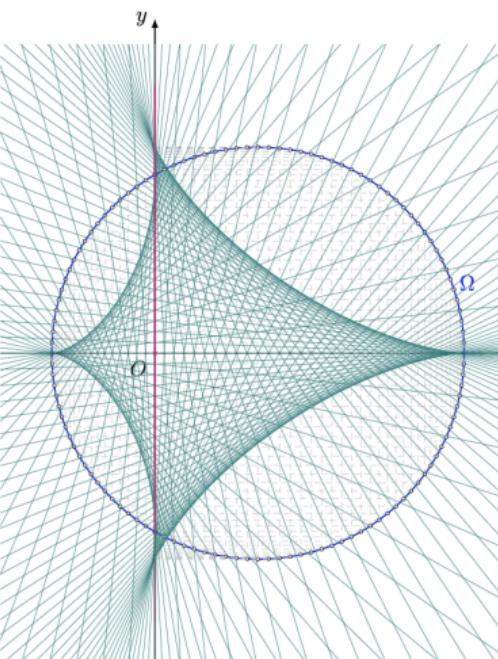
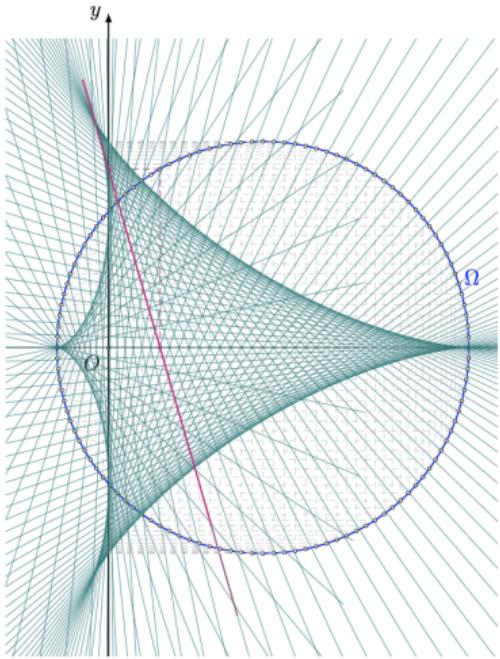
- Une indication

→ ...



Suivant la position du centre du cercle directeur, on pourrait donc trouver une \mathcal{H}_3 ou une \mathcal{H}_4 ?





Un autre exercice : le retour de l'échelle, mais ...

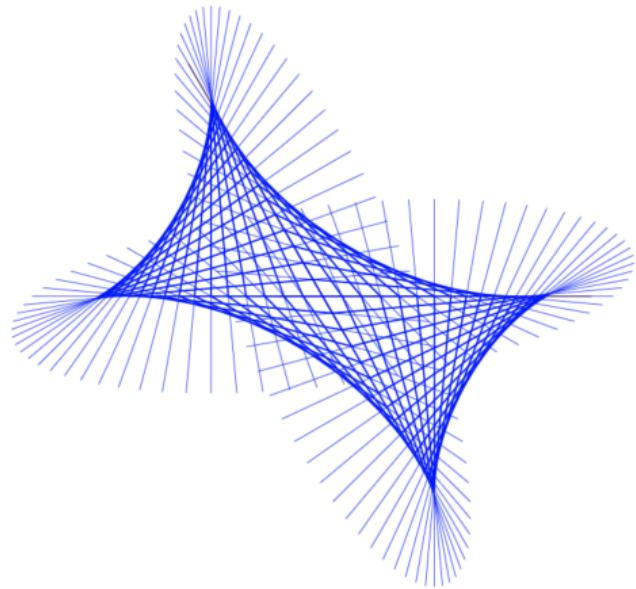
On a déjà évoqué, dans le problème de l'échelle qui glisse entre deux murs perpendiculaires (cfr. **Un exemple classique, et important**) la notion d'*hypocycloïde à 4 points de rebroussement*, ou astroïde.

Cette situation peut aussi être traitée de manière complètement géométrique — et sans grande difficulté(s) — suivant le modèle du **Théorème de l' \mathcal{H}_3** .

Or, ce modèle peut aussi servir à résoudre géométriquement le cas plus général dans lequel les murs — ou les axes de coordonnées — ne sont pas orthogonaux, mais *obliques*.

Et la notion de *pseudo-Wallace* est une clé pour y parvenir ...

... Bien sûr, et à nouveau, TKZ-EUCLIDE suggère la forme de la solution ...



VII. Un peu de géométrie (droite, ou circulaire)

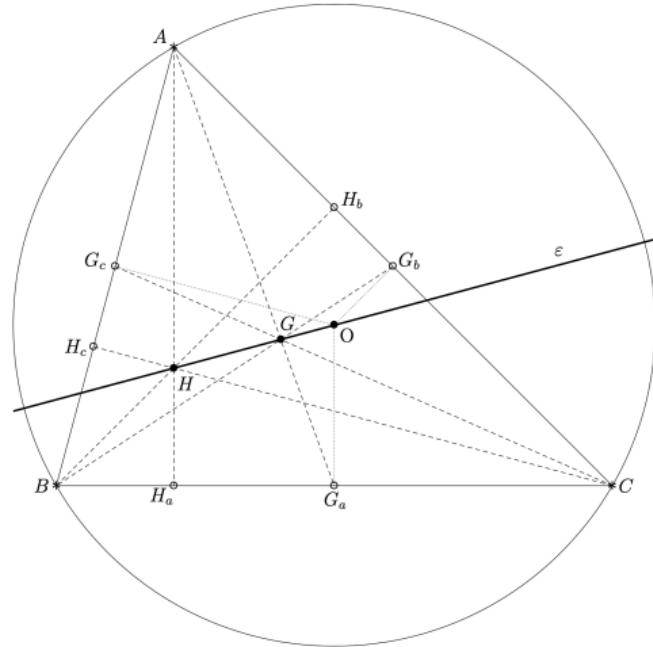
Une présentation des principaux personnages (géométriques) qui interviennent dans le **Théorème Extraordinaire**.

La droite d'Euler

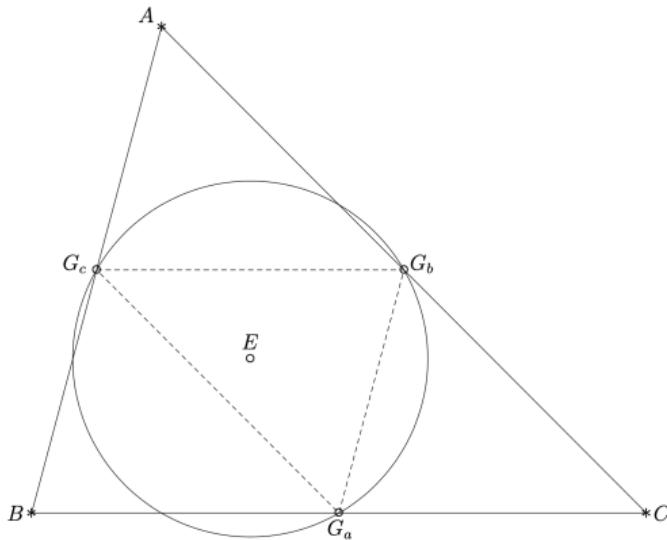
Quel que soit le triangle ABC , son orthocentre, son centre de gravité ou (iso-)barycentre, et le centre de son cercle circonscrit, sont 3 points alignés.

La droite déterminée par ces trois points est souvent appelée la *droite d'Euler* ...

... mais pourvu que le triangle ne soit pas équilatéral.

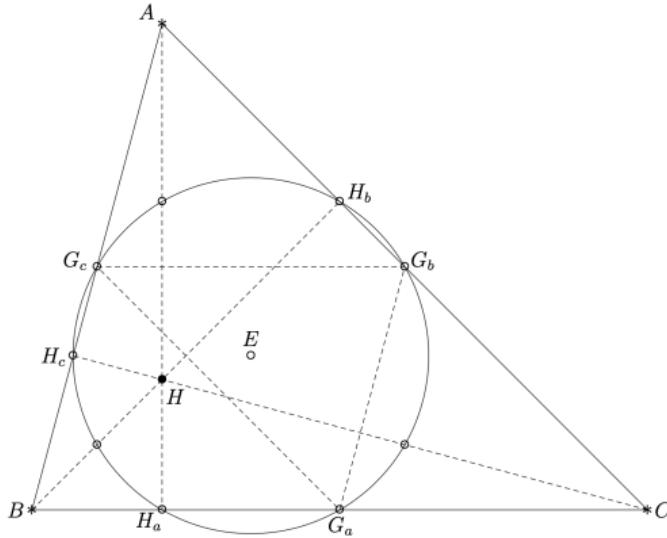


Le cercle des 9 points, de Feuerbach ou d'Euler



Le cercle d'Euler — ou cercle de Feuerbach — du triangle ABC est le cercle circonscrit au triangle médian $G_aG_bG_c$ de ce triangle ABC .

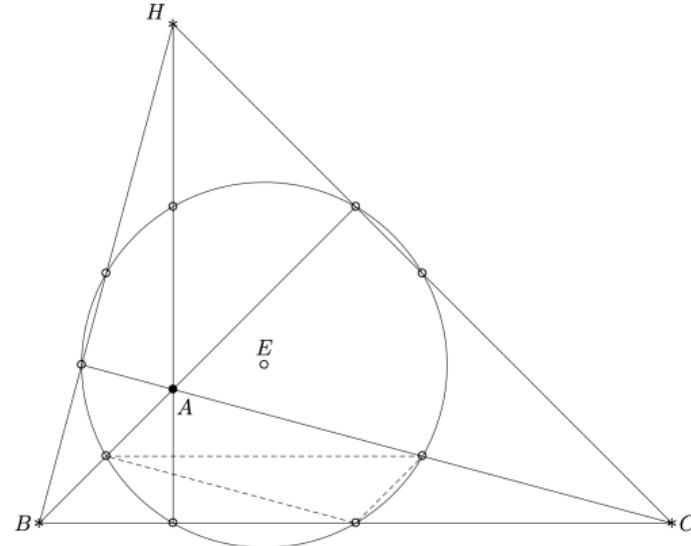
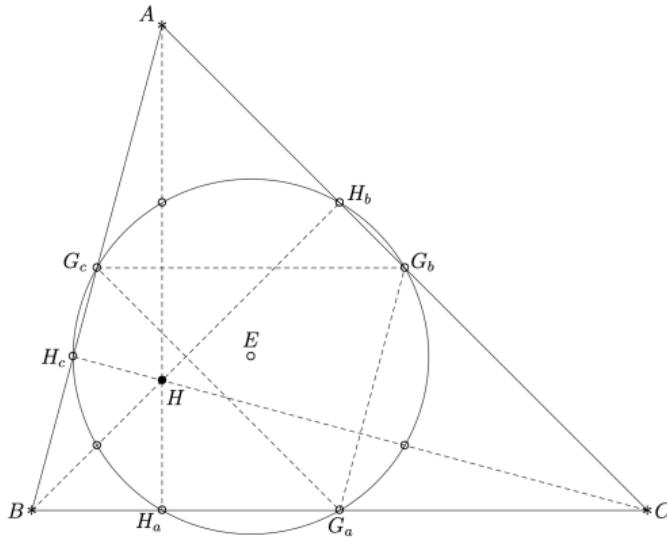
On note E son centre.



Ce cercle est encore appelé le *cercle des 9 points* du triangle ABC .

En effet, on démontre qu'il passe aussi par les 3 pieds des hauteurs H_a , H_b et H_c de ce triangle ABC , ainsi que par les 3 points-milieux des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.

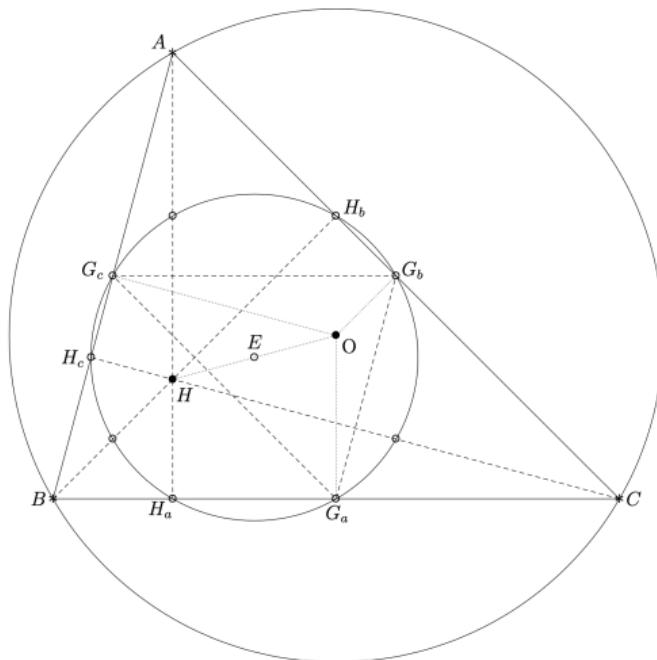
Si H est l'orthocentre du triangle ABC , alors le cercle d'Euler du triangle ABC est aussi le cercle d'Euler du triangle ABH , ainsi que celui du triangle BCH , et celui du triangle CAH .



Un tel système de 4 points $\{A, B, C, H\}$ est appelé un *système orthocentrique* de points du plan.

Le centre E du cercle d'Euler du triangle ABC est le point-milieu du segment $[OH]$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et H est l'orthocentre de ce triangle.

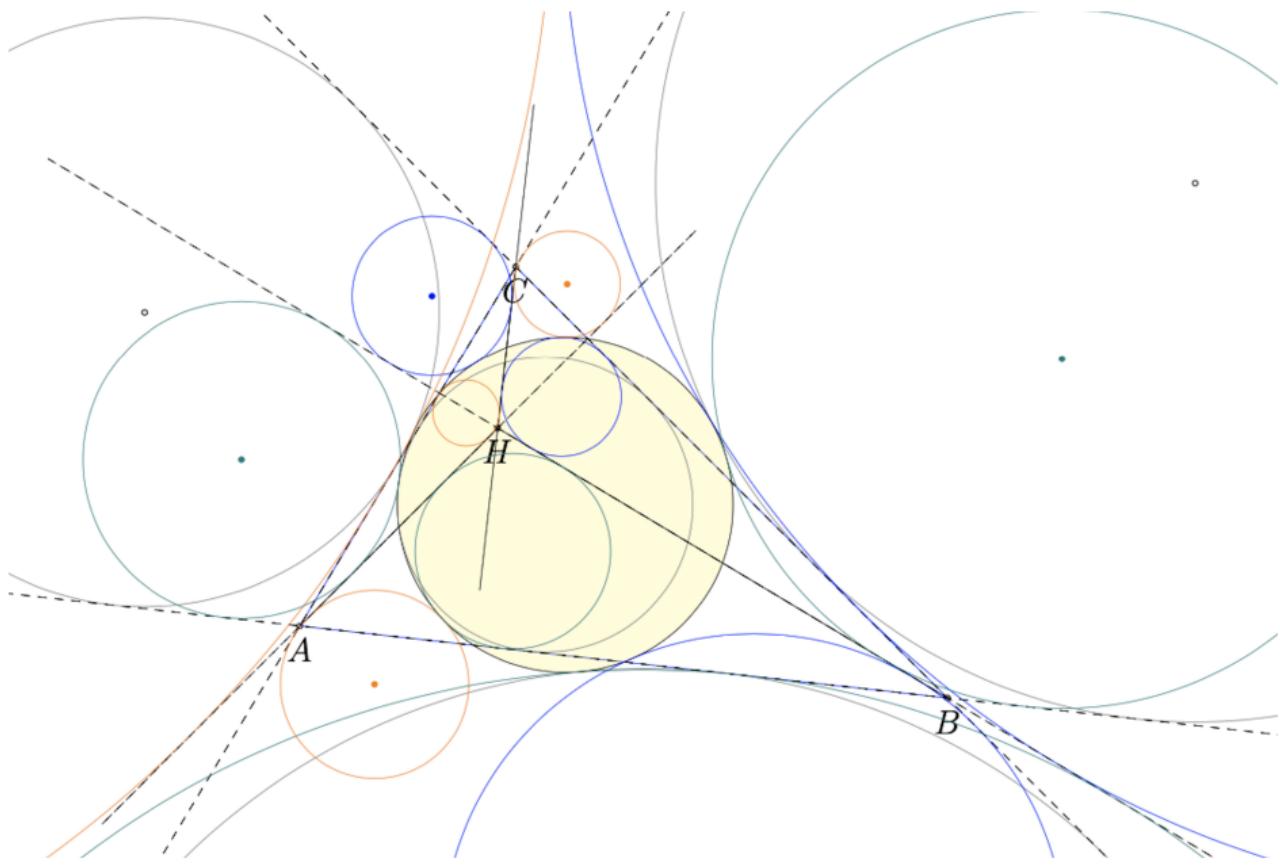
De plus, l'homothétie de centre H et de facteur 2 envoie le cercle d'Euler du triangle ABC sur son cercle circonscrit.



• Le théorème de Feuerbach

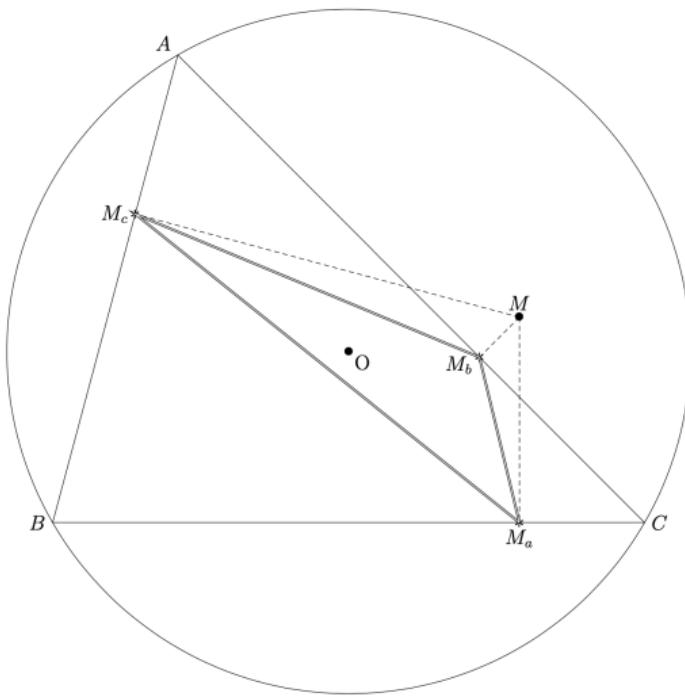
Les 16 cercles inscrits et exinscrits (ou inscrits extérieurement) d'un système orthocentrique $\{A, B, C, H\}$ de points du plan sont *tous* tangents à l'unique cercle d'Euler de ce système ...

... Sans TKZ-EUCLIDE, cela semble difficile à imaginer ...



Du triangle podaire à la droite de Wallace

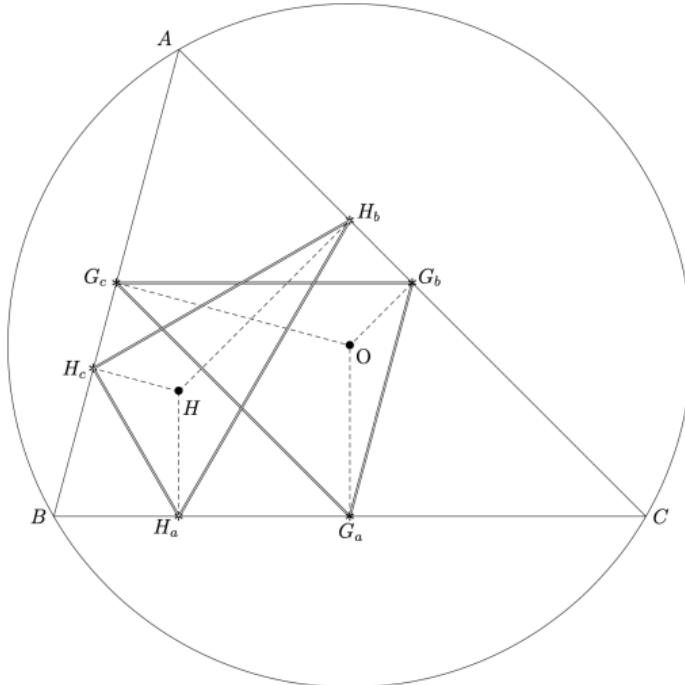
Un triangle ABC étant donné, le triangle *podaire* (ou ...) d'un point M relativement au triangle ABC , est le triangle dont les sommets sont les projections orthogonales M_a , M_b et M_c du point M sur les côtés du triangle ABC .



• Deux exemples

Le triangle podaire du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est le triangle médian $G_aG_bG_c$ du triangle ABC .

Le triangle podaire de l'orthocentre H du triangle ABC est connu comme le triangle *orthique* $H_aH_bH_c$ du triangle ABC .

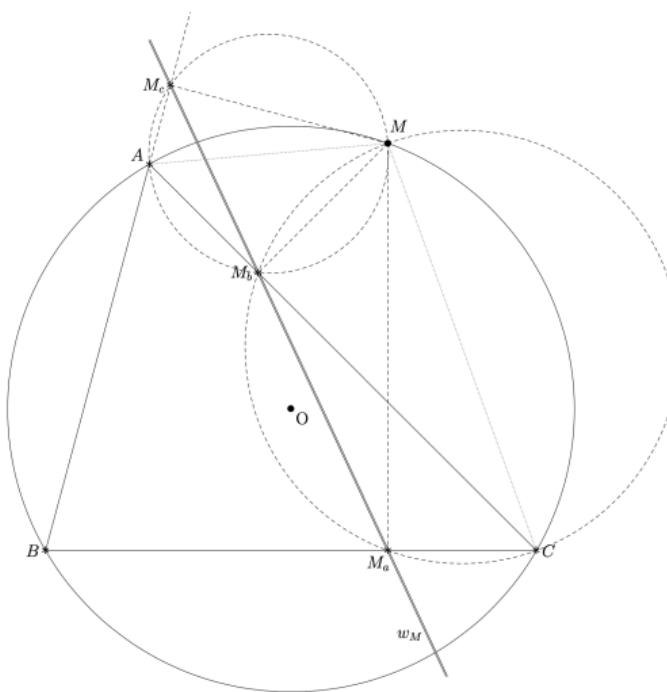
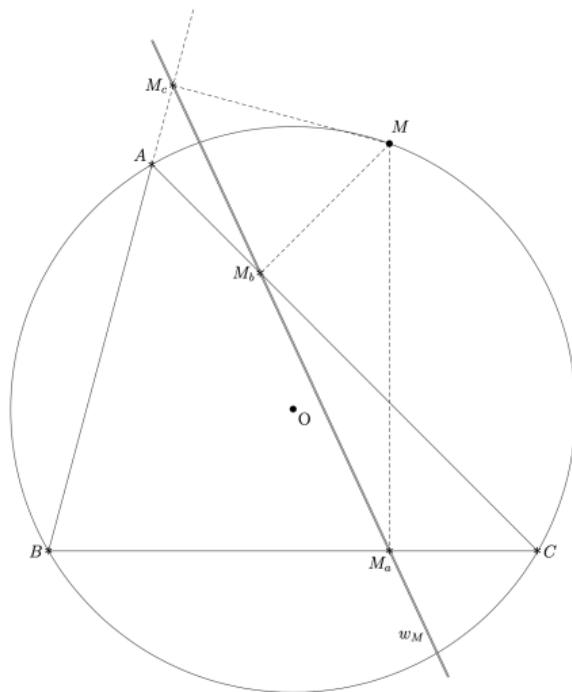


• Une affaire de lignes de niveau

Un triangle ABC étant fixé, l'aire du triangle podaire d'un point est une fonction de la *position* du dit point ...

• Du triangle podaire à la droite de Wallace

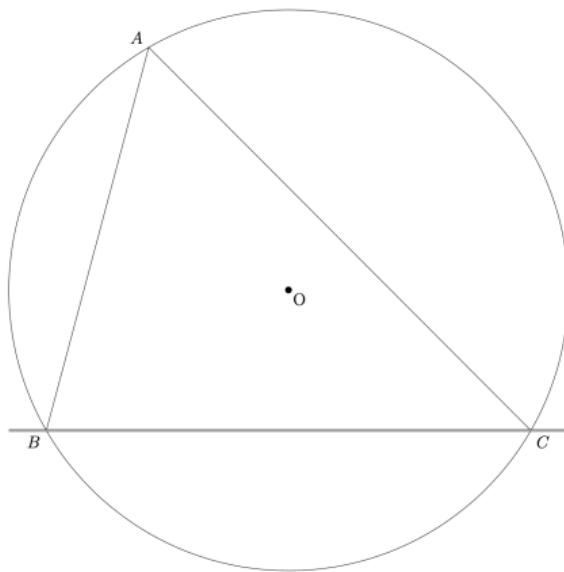
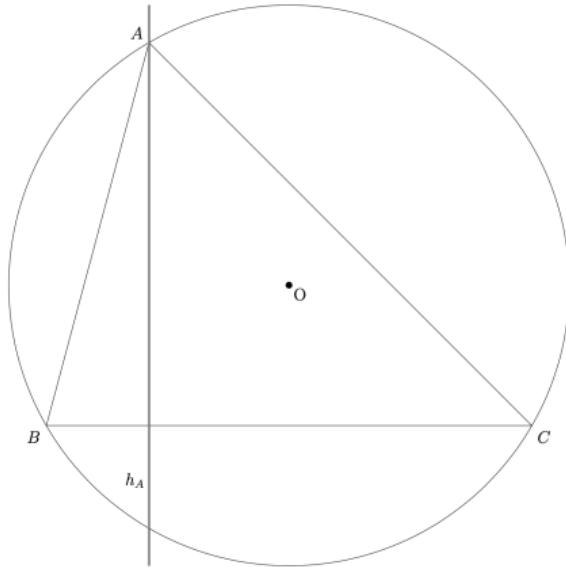
Le triangle podaire d'un point M , lorsque ce point est situé sur le cercle circonscrit à un triangle ABC , est d'aire nulle! Ses trois côtés ont donc comme support une même droite : la *droite de Wallace* du point considéré.



• Deux (petits) exercices

La hauteur h_A issue du sommet A est-elle une droite de Wallace ?

La droite d_{BC} de support du côté BC est-elle une droite de Wallace ?



Les propriétés *extraordinaires* des droites de Wallace

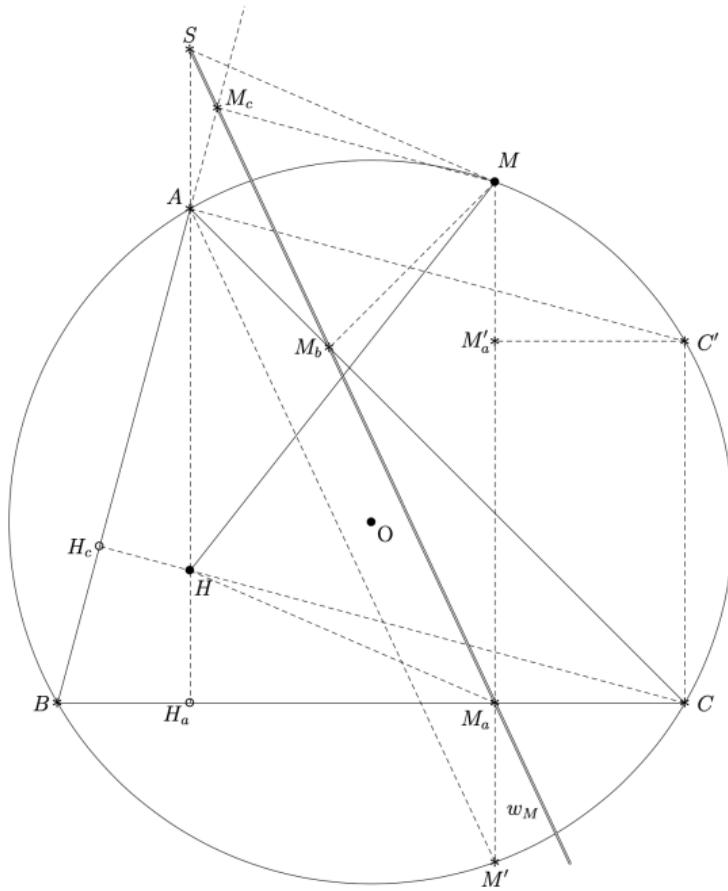
La bonne manière d'aborder la *démonstration* du **Théorème Extraordinaire**, c'est d'explorer quelques unes des propriétés — elles aussi *extraordinaires* — des droites de Wallace.

Mais cette exploration est encore plus profitable quand elle évoque l'une ou l'autre caractéristique de la *génération tangentielle* d'une hypocycloïde à 3 points de rebroussement

...

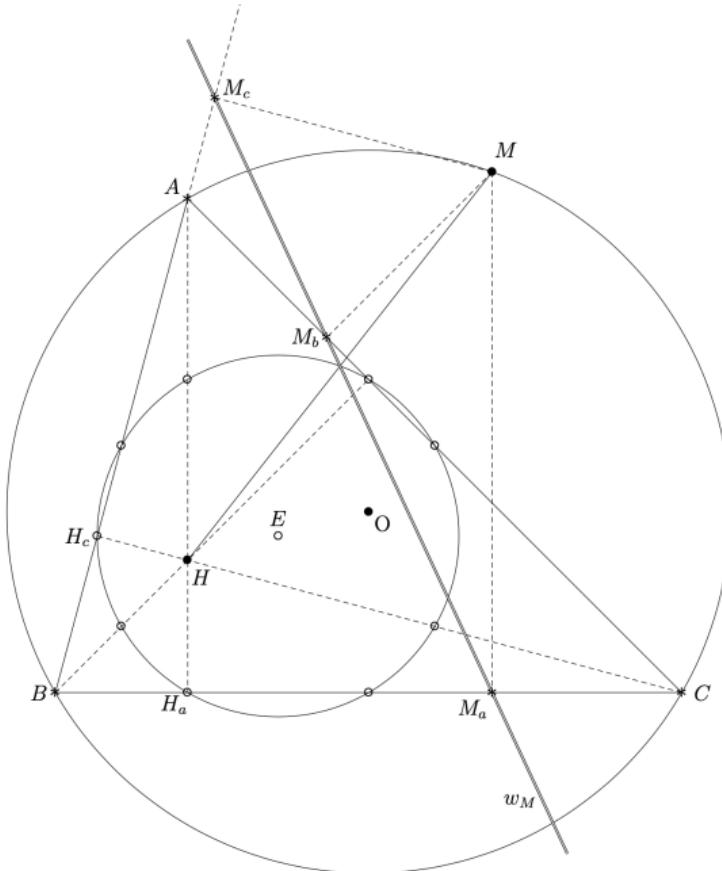
• Le théorème du milieu

Pourvu que $M \neq A, B$ et C , la droite de Wallace w_M du point M partage le segment $[HM]$ en deux parties égales.



• Corollaire

Le lieu géométrique des points en lesquels la droite de Wallace w_M d'un point quelconque M du cercle circonscrit partage le segment $[HM]$ en deux parties égales est le cercle d'Euler.



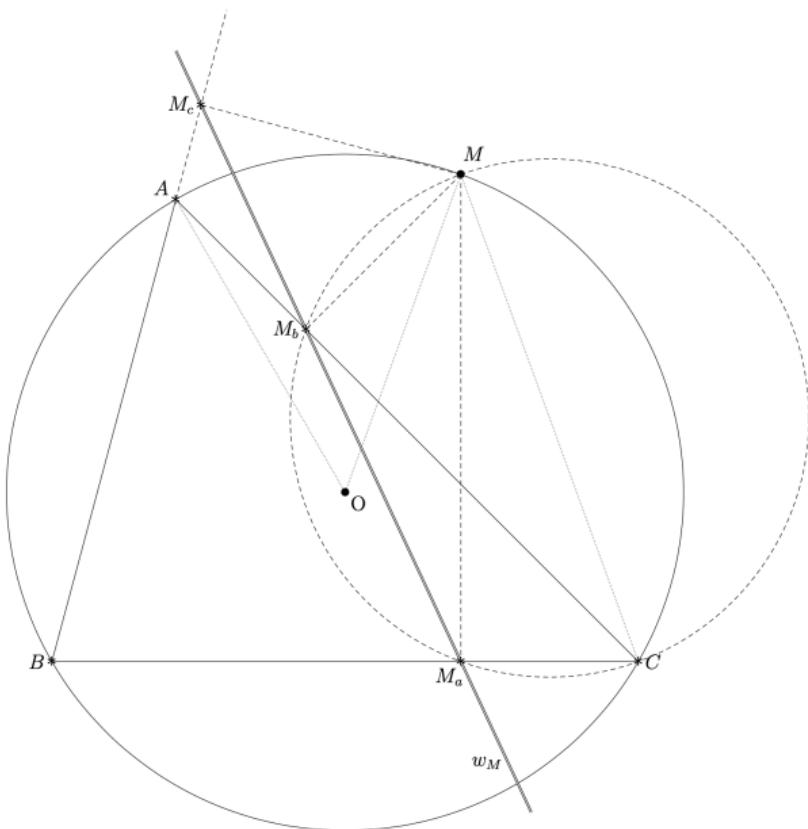
• Le calcul de l'angle d'inclinaison

Quelle que soit la position du point M sur le cercle circonscrit, on a la relation :

$$\widehat{M_c M_a B} + \frac{1}{2} \widehat{MOA} = \frac{\pi}{2}$$

L'angle $\widehat{M_c M_a B}$ est interprété comme l'angle d'inclinaison de la droite de Wallace w_M sur la droite de support d_{BC} du côté BC .

Il y a un résultat analogue pour l'angle d'inclinaison de la droite de Wallace w_M sur la droite d_{AB} , et sur la droite d_{CA} .



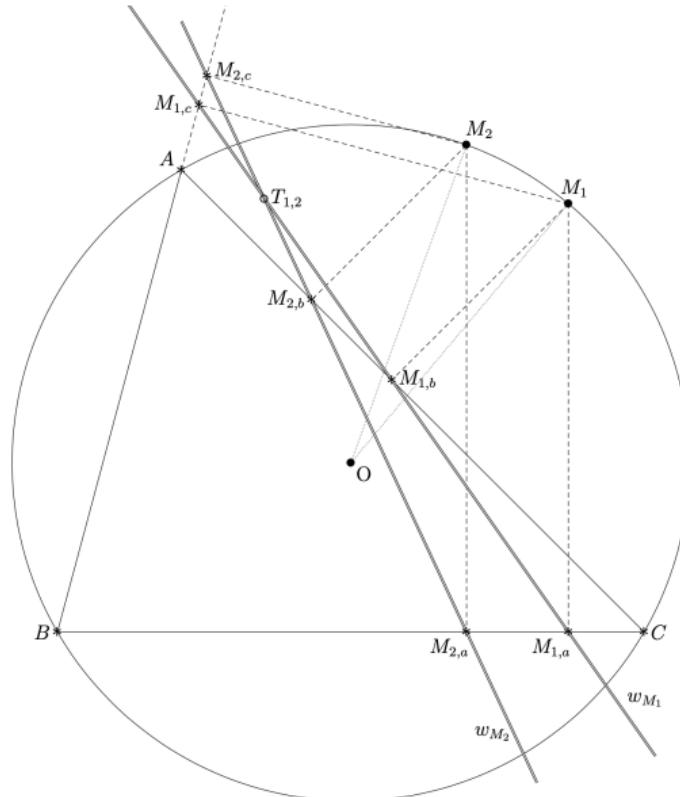
• L'angle entre deux droites de Wallace

Quelles que soient les positions des points M_1 et M_2 sur le cercle circonscrit, on a la relation :

$$\widehat{w_{M_1}, w_{M_2}} := M_{1,a} \widehat{T_{1,2}} M_{2,a} = -\frac{1}{2} \widehat{M_1 O M_2}$$

C'est une relation en termes d'angles orientés.

Elle s'obtient comme conséquence immédiate du calcul de l'angle d'inclinaison des droites de Wallace, décrit dans le résultat précédent.

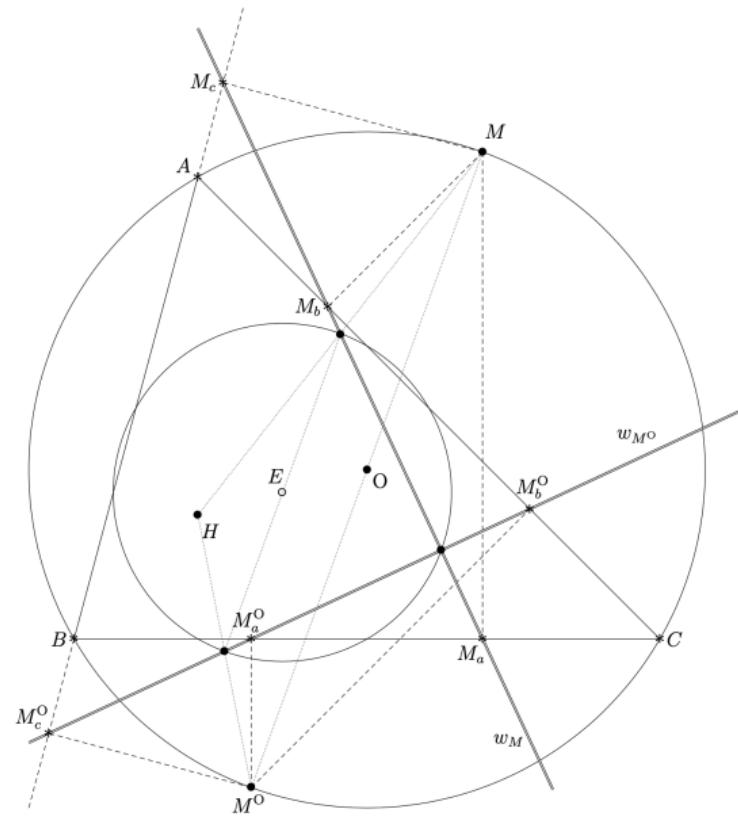


• Le théorème des perpendiculaires

Les droites de Wallace w_M et w_{M^O} , associées à des points M et M^O diamétralement opposés sur le cercle circonscrit, sont perpendiculaires.

Le lieu des sommets des angles droits correspondants est le cercle d'Euler.

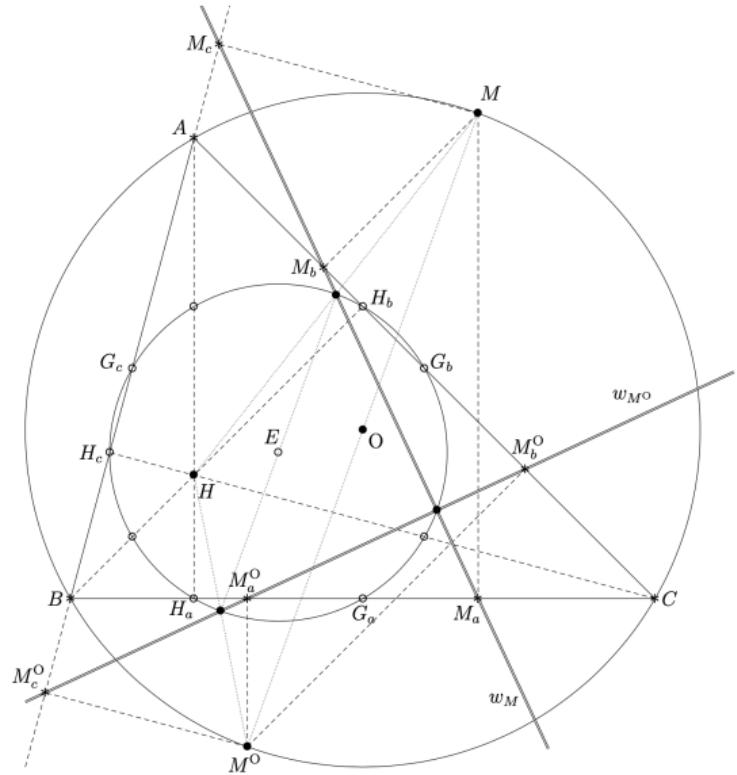
C'est ici une conséquence de l'*ensemble* des résultats précédents.



• Et lorsque tout cela s'entremêle ...

La figure ci-contre illustre une partie des propriétés qui viennent d'être évoquées ...

... et elle prépare la suite.



VIII. Le Théorème de Steiner

Il est enfin possible de comprendre une démonstration géométrique de la partie « Steiner » du **Théorème Extraordinaire**.

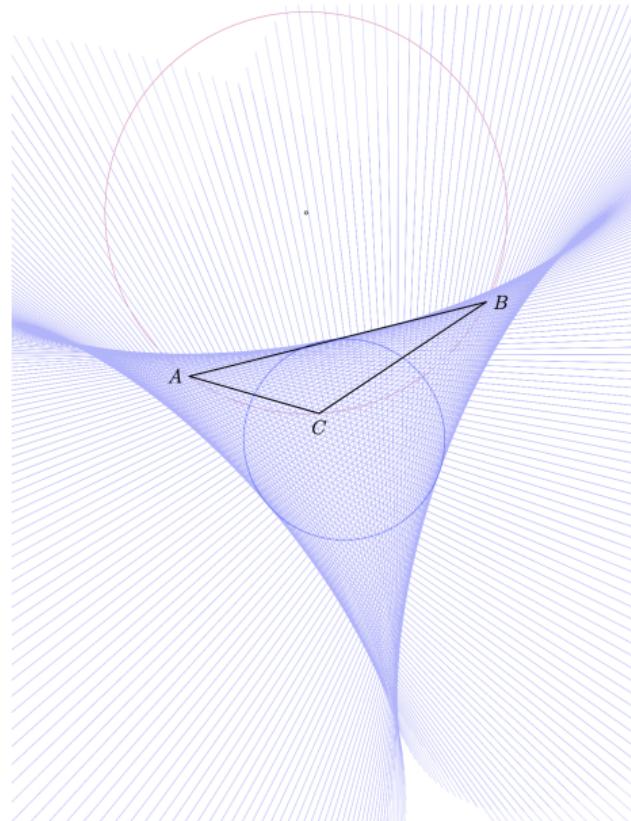
Et c'est justement la partie concernant l'enveloppe d'une famille de droites ...

L'énoncé

L'enveloppe des droites de Wallace d'un triangle ABC quelconque est une hypocycloïde à trois points de rebroussement, appelée *hypocycloïde* — ou *deltoïde* — *de Steiner* du triangle ABC .

Les trois côtés (éventuellement prolongés) de ce triangle sont tangents à cette hypocycloïde, de même que ses trois hauteurs. Le cercle d'Euler est, lui aussi, tangent à cette hypocycloïde.

Les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde sont situés sur un cercle dont le centre est celui du cercle d'Euler du triangle ABC , et dont le rayon égale une fois et demie le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.



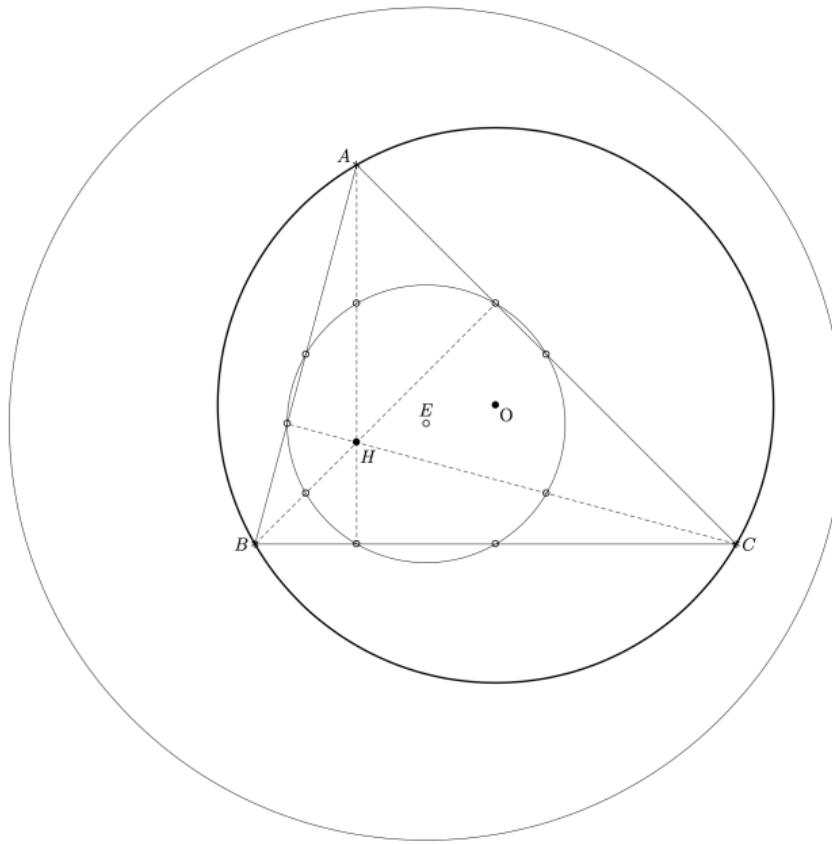
Qu'y a t-il (encore) à démontrer ?

En fait, ... rien !

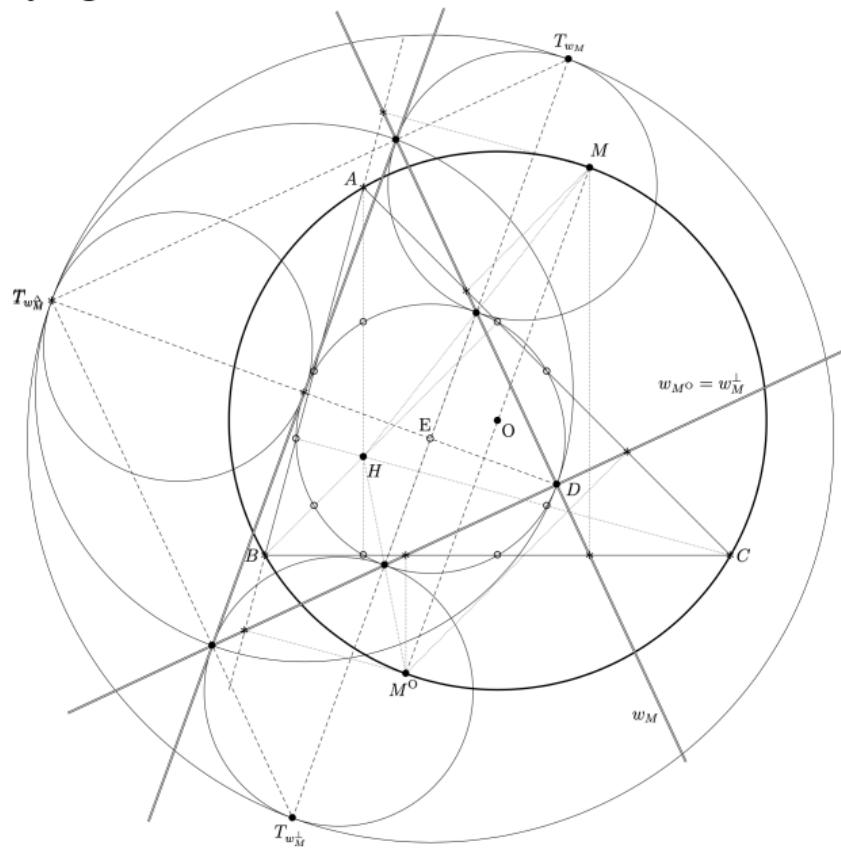
Il n'y a qu'à interpréter dans la situation considérée les propriétés géométriques, déjà déduites de la génération tangentielle de l'hypocycloïde à 3 points de rebroussement.

Ceci dit, le voyage vaut le détour ...

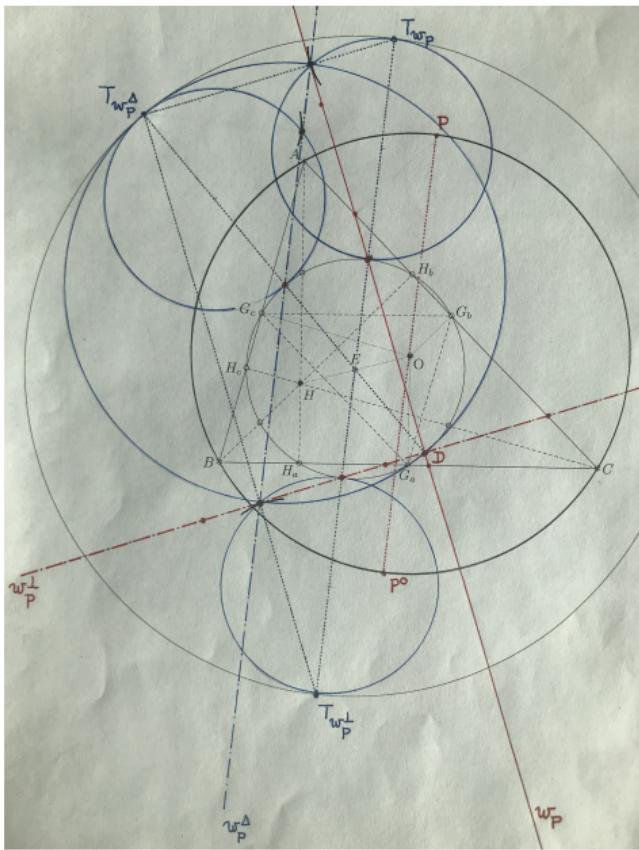
Le point de départ



Un panorama du paysage



Et un souvenir des temps anciens ...



L'article de Steiner

13.

Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades).

(Von Herrn J. Steiner.)

(Vorgetragen in der physikalisch-mathematischen Classe der Akademie zu Berlin am 7. Januar 1856)

Die Curve tritt schon beim geradlinigen Dreieck ein. Füllt man aus jedem Punkte in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die je drei Fußpunkte allemal in irgend einer Geraden G , und die Enveloppe aller dieser Geraden ist eine Curve dritter Klasse, G^3 , und vierten Grades, welche die im Unendlichen liegende Gerade, G_∞ , zur ideellen Doppeltangente hat; ferner hat sie drei Rückkehrpunkte und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in einem und denselben Punkt. Die Curve berührt namentlich auch die Seiten des Dreiecks, so wie dessen drei Höhen, d. h. die aus den Ecken auf die Gegenseiten gefallten Lothe.

Sei abc das gegebene Dreieck; δ der Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises δ' ; ferner aa , bb , cc seine drei Höhen und d der gemeinsame Schnittpunkt derselben; seien ferner α , β , γ die Mitten der Seiten und m der Mittelpunkt des durch diese Mitten und zugleich auch durch die Fußpunkte a , b , c der Höhen gehenden Kreises m^2 ; endlich sei r der Radius dieses Kreises, derselbe ist halb so groß als der Radius des Kreises δ^2 . Da der Punkt m in der Mitte zwischen δ und d liegt, so ist d der äußere Ähnlichkeitsspunkt beider Kreise. Wird von den über den Seiten des Dreiecks liegenden Bogen des Kreises m^2 , αa , βb , γc , von den Mitten der Seiten aus, mittels der Punkte u , v , w , je ein Drittel abgeschnitten, so dass Bogen $\alpha u = \frac{1}{3}\alpha a$, $\beta v = \frac{1}{3}\beta b$, $\gamma w = \frac{1}{3}\gamma c$, so theilen diese Punkte die ganze Kreislinie in drei gleiche Theile, so dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks uvw sind.

A propos d'une courbe remarquable de la troisième classe
(et du quatrième degré).
(par Mr. J. Steiner)

(Communiqué à la Classe de Physique et de Mathématiques
de L'Académie de Berlin, le 7 janvier 1856.)

Cette courbe apparaît déjà par le biais du triangle rectiligne. Si, de chaque point du cercle circonscrit à ce triangle on mène une perpendiculaire à ses côtés, alors les trois pieds sont situés ensemble sur une droite G , et l'enveloppe de toutes ces droites est une courbe de la troisième classe, G^3 , et du quatrième degré, qui possède la droite de l'infini, G_∞ , comme tangente double idéale; de plus, elle a trois points de rebroussement et les trois tangentes de rebroussement se coupent en un seul et même point. Cette courbe est notamment tangente aux côtés du triangle, ainsi qu'à ses trois hauteurs, c'est-à-dire aux perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés.

Soit abc le triangle donné; δ le centre du cercle δ^2 qui lui est circonscrit; de plus aa , bb , cc ses trois hauteurs et d le point d'intersection commun de celles-ci; soient encore α , β , γ les milieux des côtés et m le centre du cercle m^2 passant par ces milieux et aussi par les pieds a , b , c des hauteurs; enfin soit r le rayon de ce cercle, ce dernier est à moitié aussi grand que le rayon du cercle δ^2 . Comme le point m est au milieu entre δ et d , dès lors d est le centre de similitude externe des deux cercles. Si, des arcs du cercle m^2 situés à l'extérieur des côtés du triangle, αa , βb , γc , à partir des milieux des côtés, et au moyen des points u , v , w , on découpe un tiers d'arc, de telle sorte que les arcs $\alpha u = \frac{1}{3}\alpha a$, $\beta v = \frac{1}{3}\beta b$, $\gamma w = \frac{1}{3}\gamma c$, alors ces points divisent toute cette circonference en trois parties égales, de telle sorte qu'ils sont les sommets d'un triangle équilatéral uvw .

Soient p un point quelconque sur la circonference δ^2 et G sa ligne-des-pieds correspondante, alors la droite dp issue de l'orthocentre d vers p a son point milieu, noté μ , toujours sur G et aussi sur le cercle m^2 ; ce cercle est coupé par G une seconde fois en s ;

le point μ est appelé le **centre** et s le **sommet** de la ligne-des-pieds G . Sur le cercle δ^2 , soit p_1 le point diamétralement opposé à p , alors sa ligne-des-pieds G_1 est à chaque fois perpendiculaire à G , et les deux ont le sommet s en commun et leurs centres μ et μ_1 sont de même diamétralement opposés sur le cercle m^2 , et les diamètres pp_1 et $\mu\mu_1$ sont parallèles. En conséquence, les lignes-des-pieds, ou les tangentes à la courbe G^3 , sont perpendiculaires l'une à l'autre par couple, sur chacune se trouve une — et une seule — autre perpendiculaire bien déterminée, et le lieu des sommets s de tous ces angles droits est la circonference m^2 . Cette propriété est commune à cette courbe et aux sections coniques. De tels couples de tangentes perpendiculaires sont notamment aussi les côtés et les hauteurs correspondantes du triangle donné. Chaque tel couple de deux lignes-des-pieds perpendiculaires entre elles s'appelle à bon droit une **paire**.

Chaque ligne-des-pieds G_2 ($=G$) est coupée par chaque telle paire en deux points, qui sont également séparés de leur centre μ_2 , une conséquence de cela est : que G_2 est touchée par la courbe G^3 en ce point t_2 qui est aussi distant de son centre que de son sommet s_2 , c'est-à-dire $\mu_2 t_2 = \mu_2 s_2$. Il s'ensuit encore les intéressantes propriétés suivantes. La droite qui passe par les points de contact t, t_1 d'une paire GG_1 , est encore et aussi une ligne-des-pieds G_2 , et celle, qui forme une paire avec celle-ci, passe à chaque fois par le sommet de chaque paire ; en outre la sécante-de-contact tt_1 est de longueur constante, plus précisément elle est égale au quadruple du rayon du cercle m^2 , $tt_1 = 4r$. Ou réciproquement : la courbe G^3 coupe chacune de ses tangentes G_2 en deux tels points t et t_1 , que la distance de l'un à l'autre est constante, et toujours égale au diamètre du cercle δ^2 ou au diamètre doublé du cercle m^2 ; et que les tangentes en deux tels points d'intersection forment ensemble une paire. Les trois normales élevées en les points d'intersection t, t_1 et en le point de contact t_2 de chaque tangente G_2 se coupent en un point q et le lieu de de tel point est un cercle $[m]^2$, qui est concentrique avec le cercle m^2 , et a un rayon trois fois aussi grand, que celui-ci. La courbe G^3 touche le cercle m^2 en les trois points u, v, w définis plus haut et a ceux-ci pour sommets. En ces points, les tangentes correspondantes, par exemple U, V, W , et les diamètres de cercle U_1, V_1, W_1 forment les uns avec les autres des paires ; celles-ci sont

les seules trois lignes-des-pieds, pour lesquelles les sommets (s), centres (μ) et points de contact (t) sont réunis, les autres ont les points u, v, w comme sommets, leurs points diamétralement opposés u_1, v_1, w_1 (dans le cercle m^2) comme centres, et au-delà de la longueur du diamètre pour ceux-ci leurs points de contact u_2, v_2, w_2 . Ces derniers points sont les trois points de rebroussement de la courbe G^3 et U_1, V_1, W_1 sont les tangentes de rebroussement, qui passent toutes les trois aussi par le centre m du cercle, sont de même longueur, à savoir $mu_2 = mv_2 = mw_2 = 3r$, et qui forment les uns avec les autres des angles égaux ($=120^\circ$), de telle sorte que les trois points de rebroussement u_2, v_2, w_2 sont situés sur le cercle dénoté $[m]^2$ plus haut et sont les sommets d'un triangle équilatéral, qui a m comme centre de gravité ; les trois tangentes de rebroussement sont aussi normales à la courbe en ses sommets u, v, w et on a $uu_2 = vv_2 = ww_2 = 4r$. La partie réelle de la courbe G^3 consiste seulement en un triangle curviligne régulier $u_2v_2w_2$, qui est situé à l'intérieur du triangle rectiligne $u_2v_2w_2$, mais encercle le cercle m^2 ; ses trois côtés égaux u_2w_2, v_2u_2, w_2v_2 sont convexes intérieurement et touchent le cercle en leurs milieux (sommets) u, v, w ; la longueur de chaque côté est $= 5\frac{1}{3}r$,

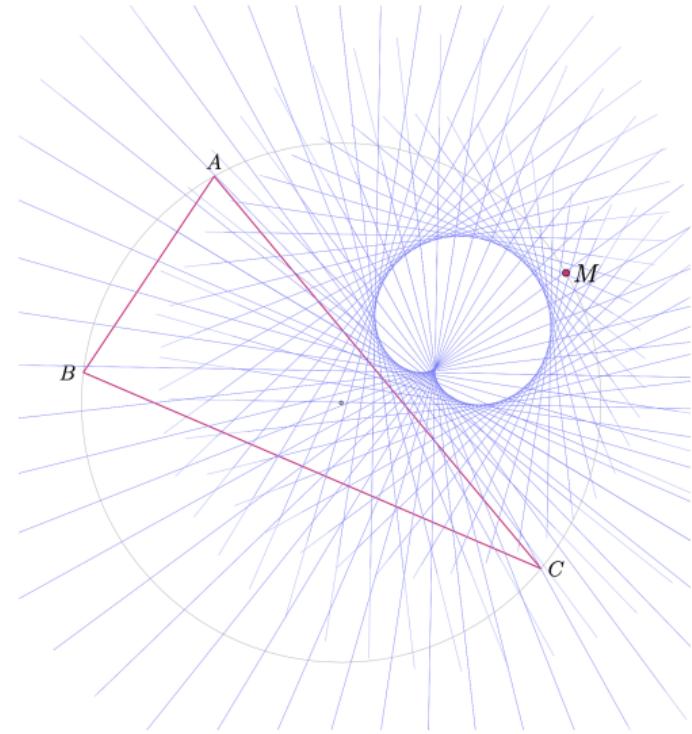
...

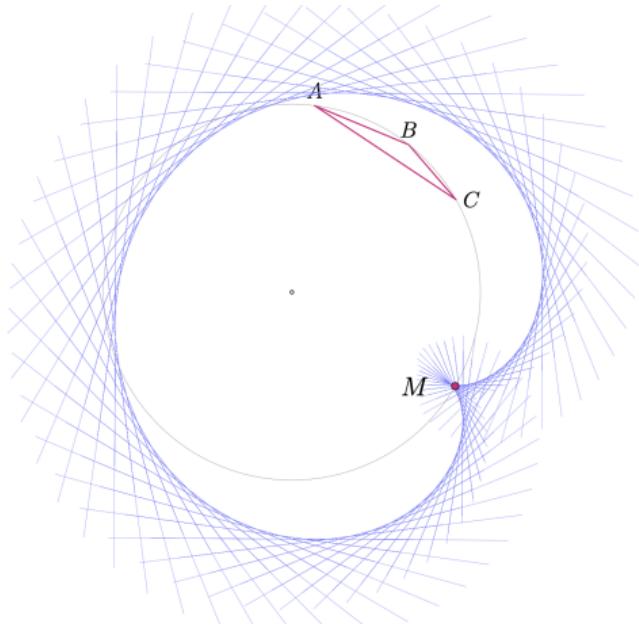
Steiner s'est-il trompé ?

L'enveloppe — relativement à un point fixé — des droites de Wallace d'un triangle en rotation autour du centre de son cercle circonscrit est-elle équivalente à l'enveloppe des droites de Wallace de *tous* les points de son cercle circonscrit ?

Ou, en plus simple : faire tourner le triangle, ou le point, c'est la même chose ?

.... Apparemment, non !

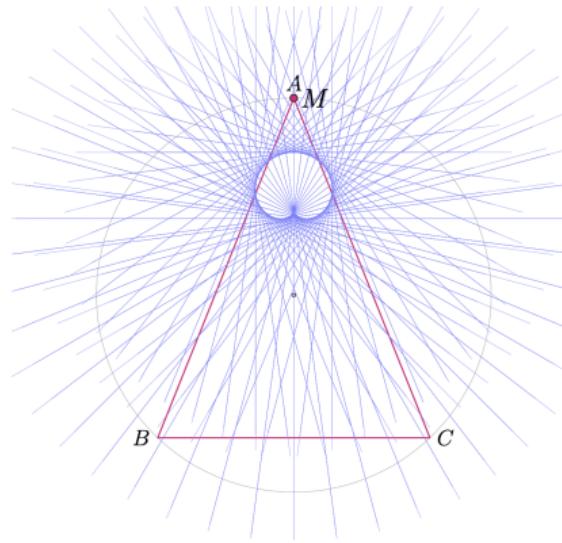
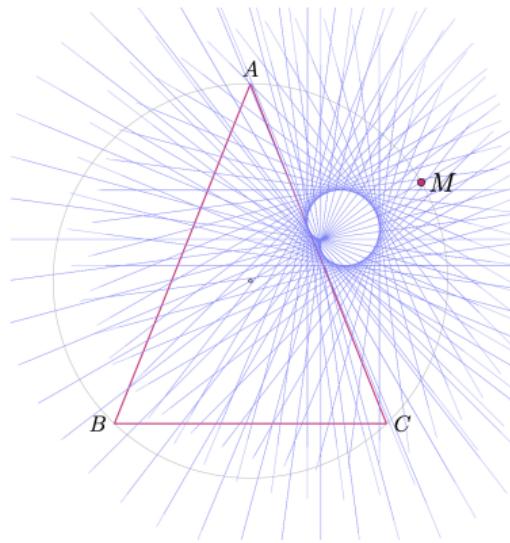




... Et il n'y a vraiment aucun espoir ... !

... Tout ce que TKZ-EUCLIDE montre — et systématiquement ! — c'est qu'on obtient toujours une *cardioïde* comme enveloppe ...

... Or, on montre assez facilement que, dans cette situation, le triangle en rotation tourne *dans le même sens* que la droite de Wallace du point fixé ...



... Mais pour une hypocycloïde, le sens de rotation de la circonference roulante est toujours *opposé* à celui induit sur la base. Tandis que pour une épicycloïde, le sens de rotation de la circonference roulante est toujours *de même signe* que celui induit sur la base.

Et une cardioïde n'est rien d'autre qu'une épicycloïde à un (seul) point de rebroussement ...

IX. Le Théorème de Morley

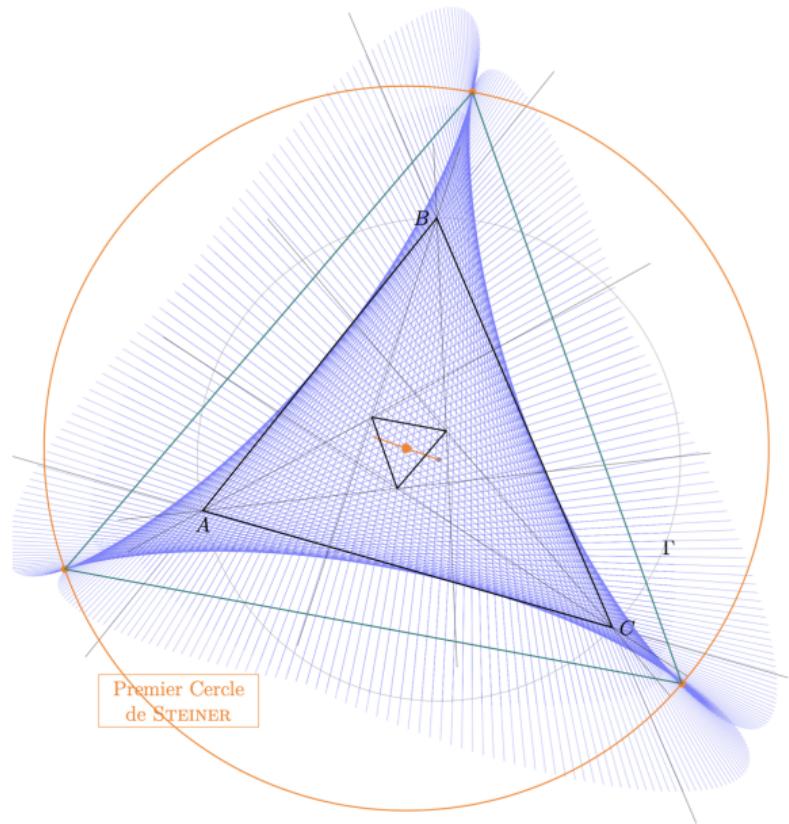
La partie « Morley » du **Théorème Extraordinaire** admet des démonstrations aussi géométriques que sa partie « Steiner ».

Mais il semble y être moins question d'enveloppes de familles de droites ...

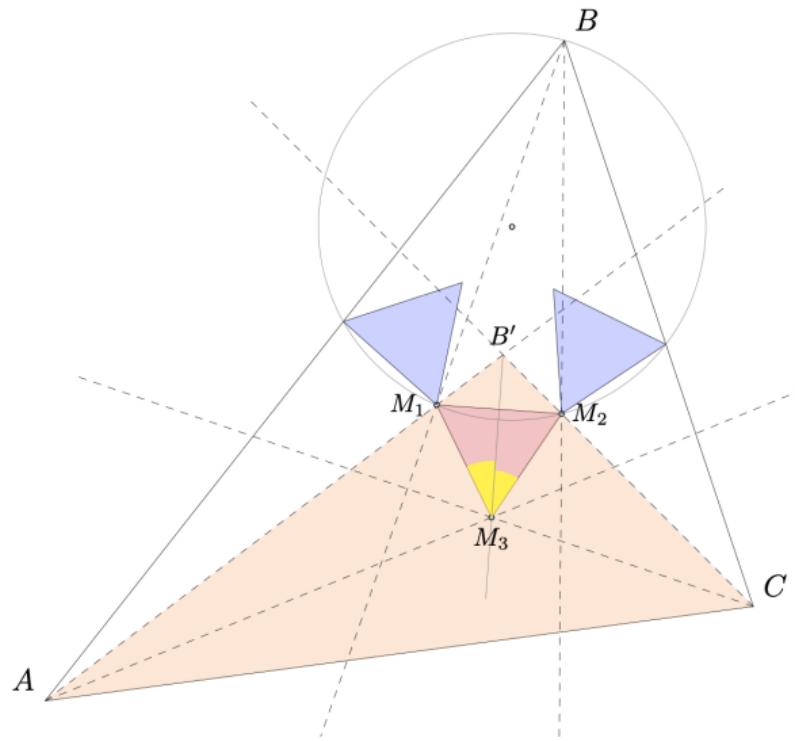
L'énoncé

Le triangle dont les sommets sont les points communs aux trissectrices adjacentes des angles du triangle ABC est toujours un triangle équilatéral, appelé le *triangle de Morley* du triangle ABC .

Les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde de Steiner du triangle ABC sont évidemment les sommets d'un triangle équilatéral, *mais* les côtés de ce dernier sont *parallèles* à ceux du *triangle de Morley* du triangle ABC .



Une démonstration géométrique



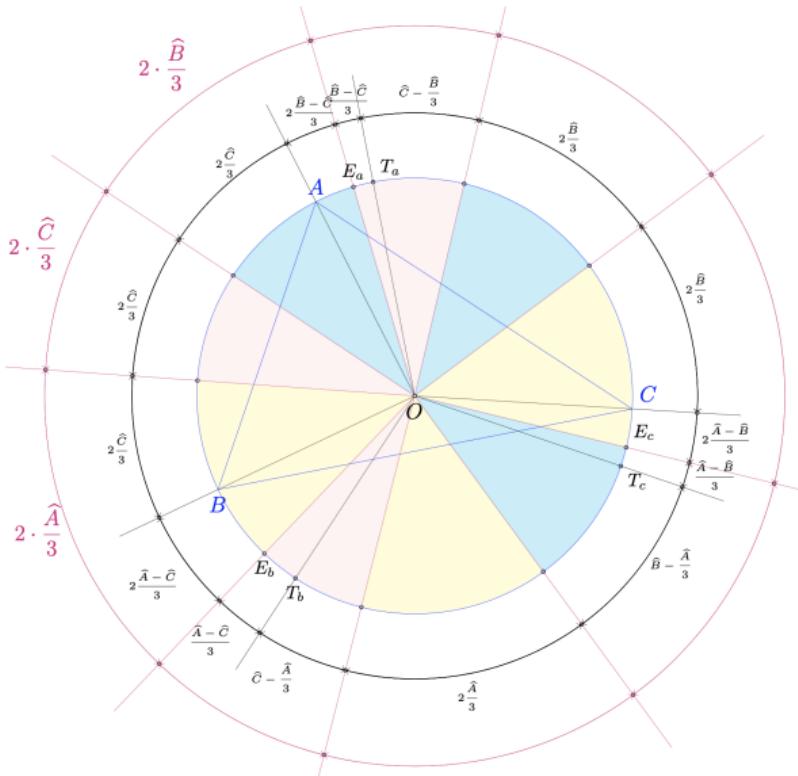
Il y a de nombreuses démonstrations du théorème de Morley, et plusieurs sont à proprement parler géométriques.

Celle illustrée ci-contre est probablement une des plus simples.

Elle est due à J. M. Child et M. T. Naraniengar, avec des améliorations de P. Pamfilos.

La démonstration de la partie du théorème de Morley en relation avec l'hypocycloïde de Steiner peut s'appuyer sur la notion de *triangle moyen*, ou *triangle dérivé*, d'un triangle donné.

Le triangle moyen, ou dérivé, d'un triangle donné



Le triangle moyen, ou triangle dérivé, d'un triangle ABC donné, est le triangle $T_a T_b T_c$, pour lequel T_a est le point d'intersection le plus proche du point A , de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC , et pareillement pour T_b et T_c .

Cette notion apparaît déjà — mais sans cette appellation — dans l'article cité de J. Steiner.

Le triangle dérivé permet de décomposer d'une manière remarquable les angles au centre associées au triangle ABC , à partir de leur trisection.

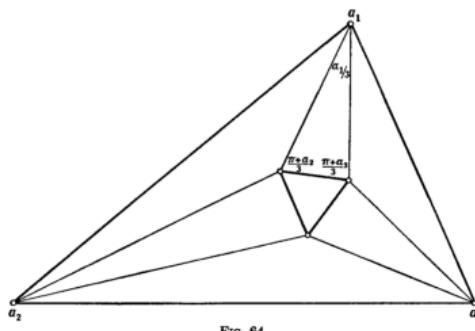


FIG. 64

Consider in particular the cardioids which lie inside the triangle. Let c_1 be the centre of that of which a_2a_3 is a double line.

Then

$$\begin{aligned}\angle a_3, a_2, c_1 &= a_2/3 \\ \angle c_1, a_3, a_2 &= a_3/3\end{aligned}$$

and we have seen that the lines c_1c_2 , c_2c_3 , c_3c_1 form an equilateral triangle.*

Exercise 10 – Verify this by trigonometry.

Exercise 11 – Verify from the figure that the lines of the triangle a_i make with any line of the triangle c_i angles whose sum is $0 \pmod{\pi}$.

§ 141. The Deltoid – We have seen the convenience of treating the cardioid from the line-equation

$$x - 3t + 3t^2 - \bar{x}t^3 = 0$$

Let us now consider the curve whose line-equation is the cubic in t ,

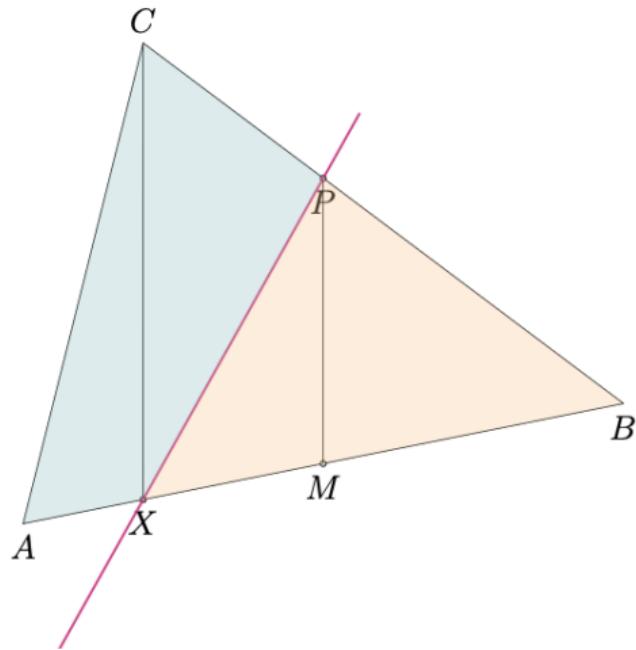
$$(1) \quad t^3 - xt^2 + \bar{x}t - 1 = 0$$

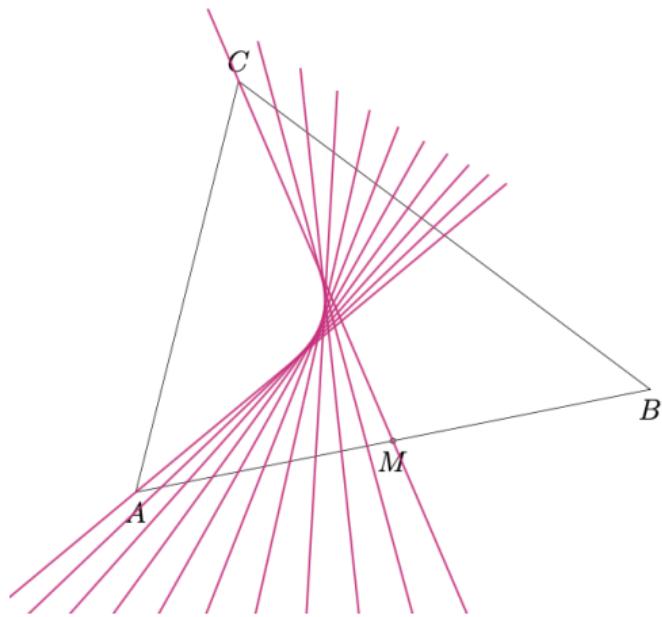
* For references on this theorem see Lob and Richmond, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 31.

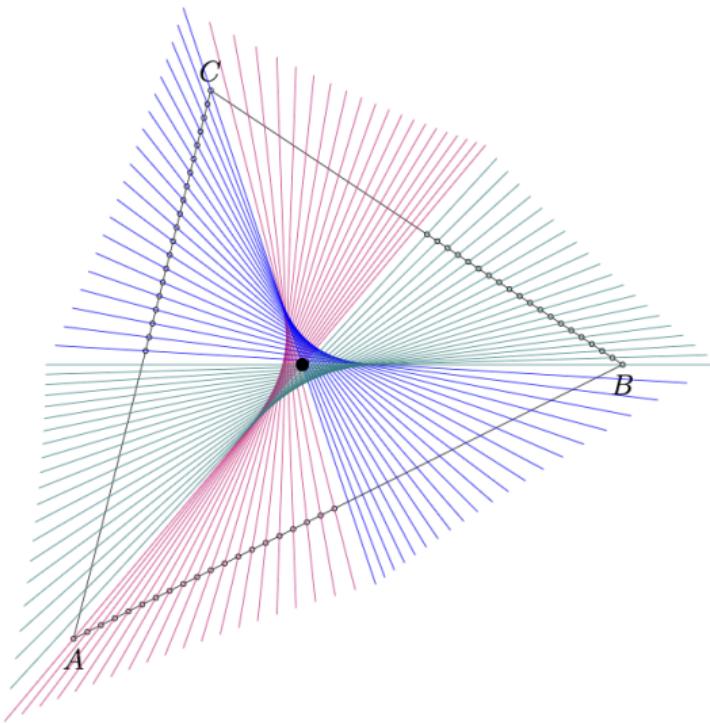
For the analogous theory of the axes of an n -line, see *American Journal of Mathematics*, vol. 51 (1929); *Extensions of Clifford's Chain-Theorem*, by F. Morley, and a note by P. S. Wagner, *ibid*.

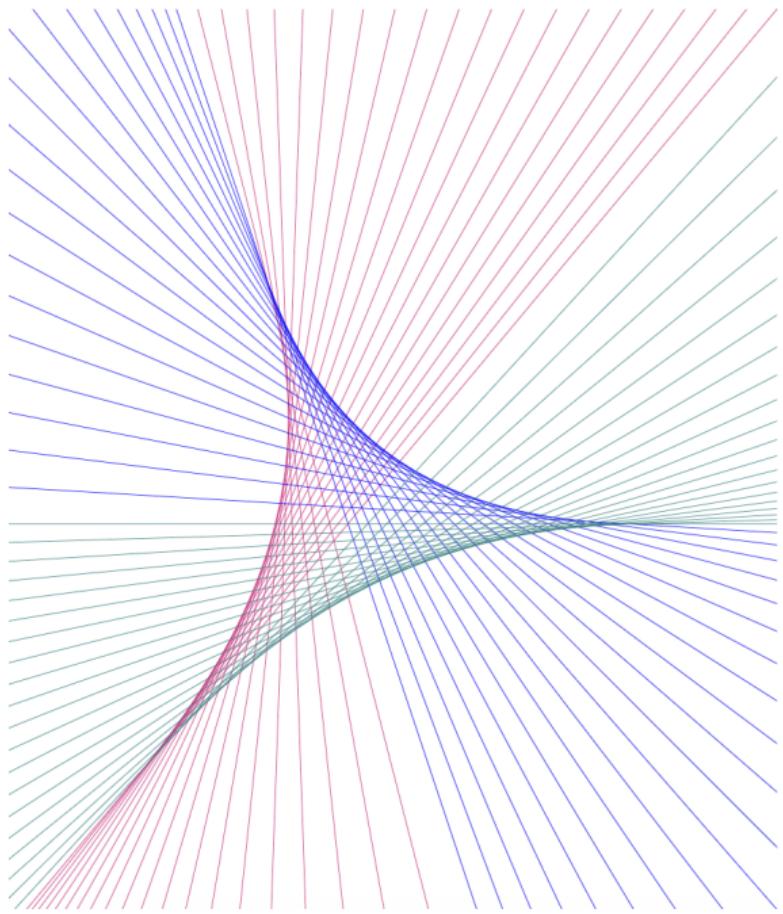
XI. Bissection d'un triangle

Construction géométrique proposée par Jordanus DE NEMORE,
mathématicien et scientifique du XIII^e siècle







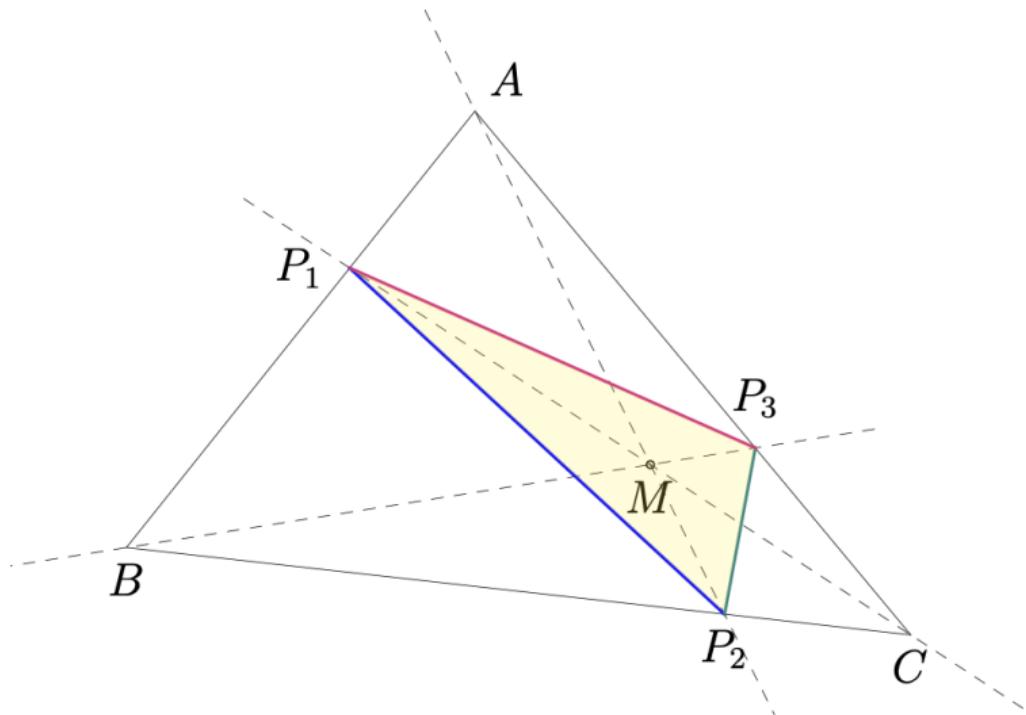


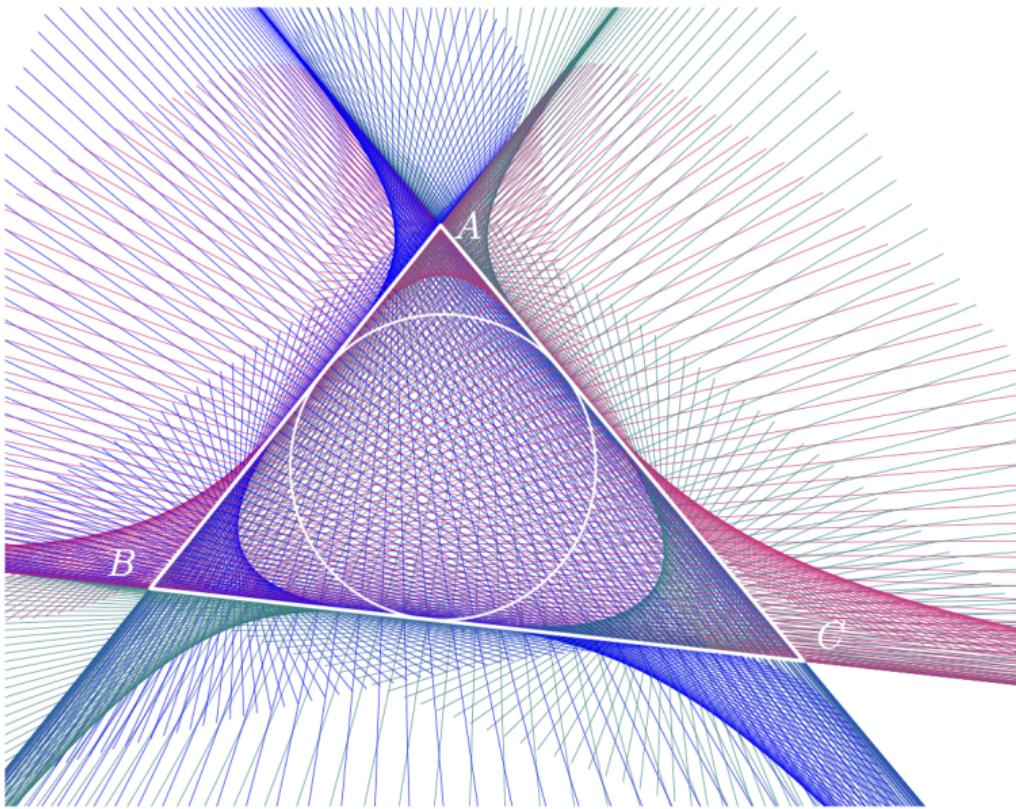
XII. Céva, cà vient

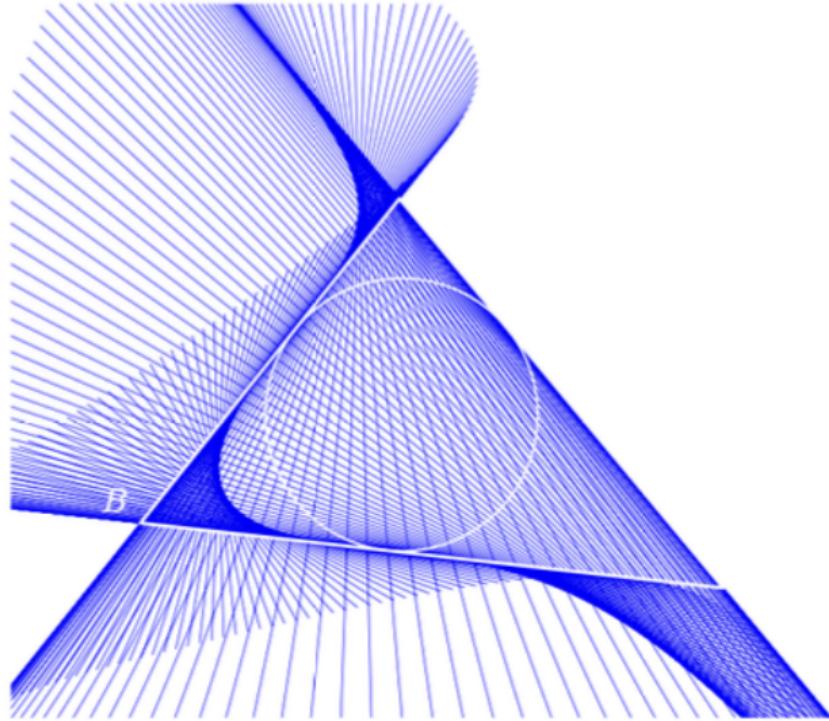
Giovanni Ceva (1647–1734)

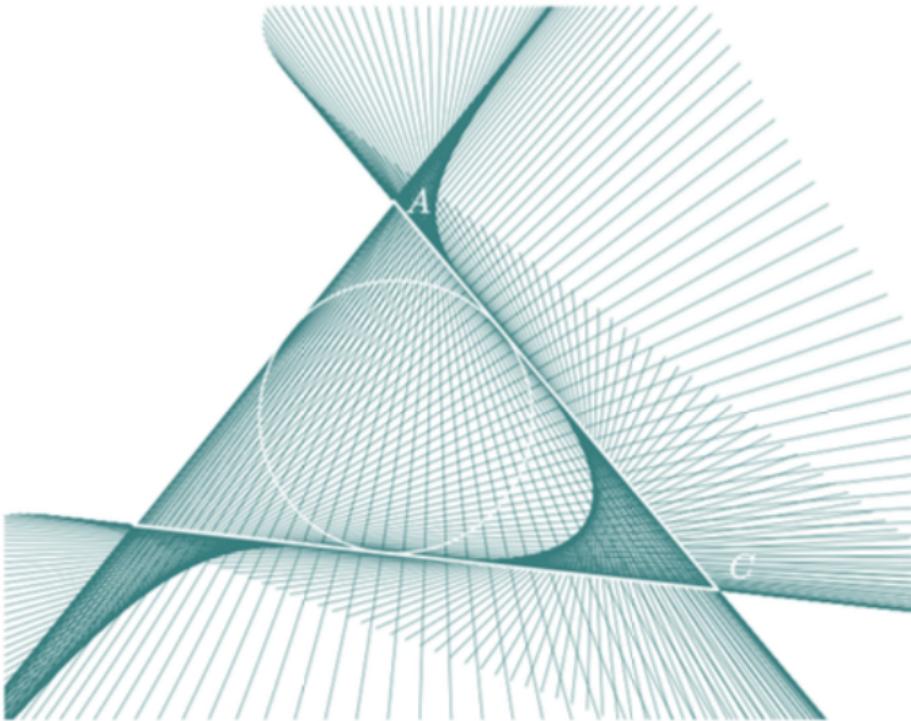
Des enveloppes beaucoup moins « civilisées » !

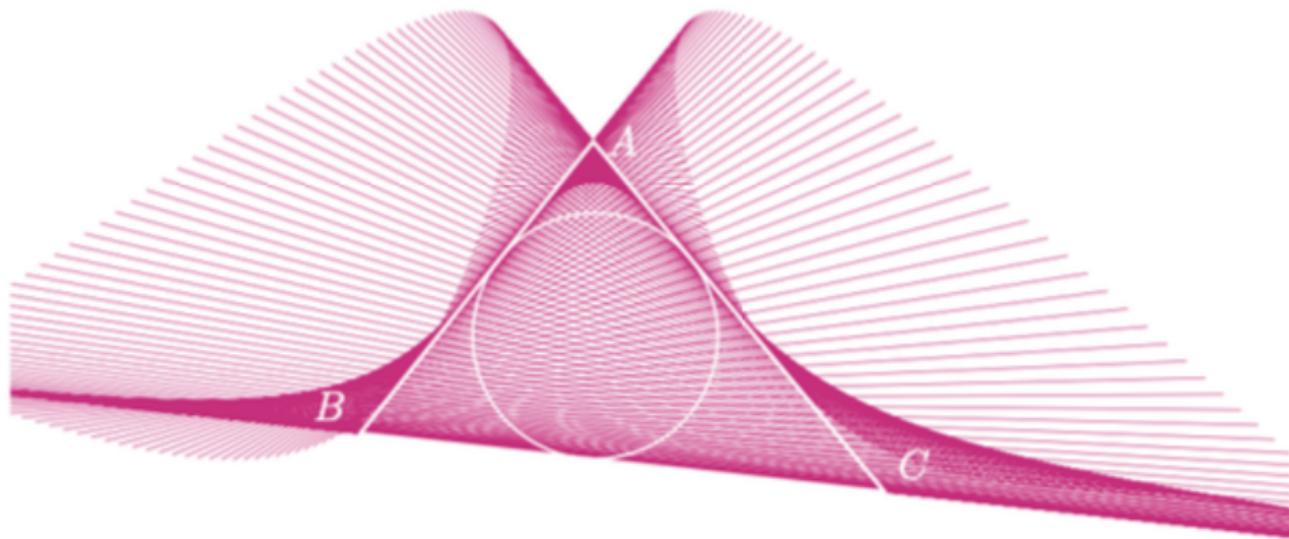
Un triangle cévien



Points M sur le cercle inscrit au triangle ABC 







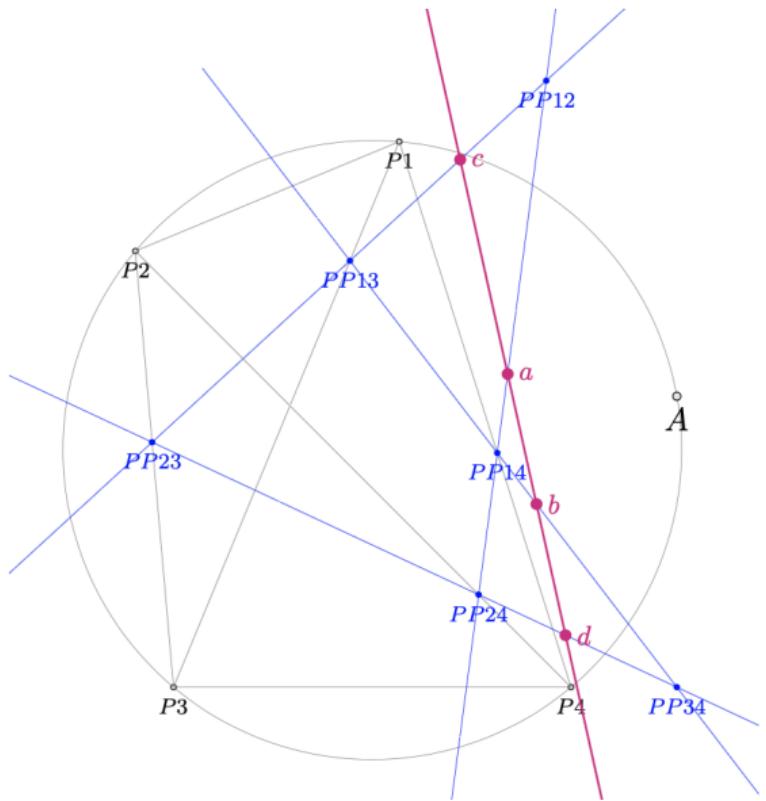
XIII. Bye bye les triangles... .

Les théorèmes de Steiner sur l'« itération des podaires »

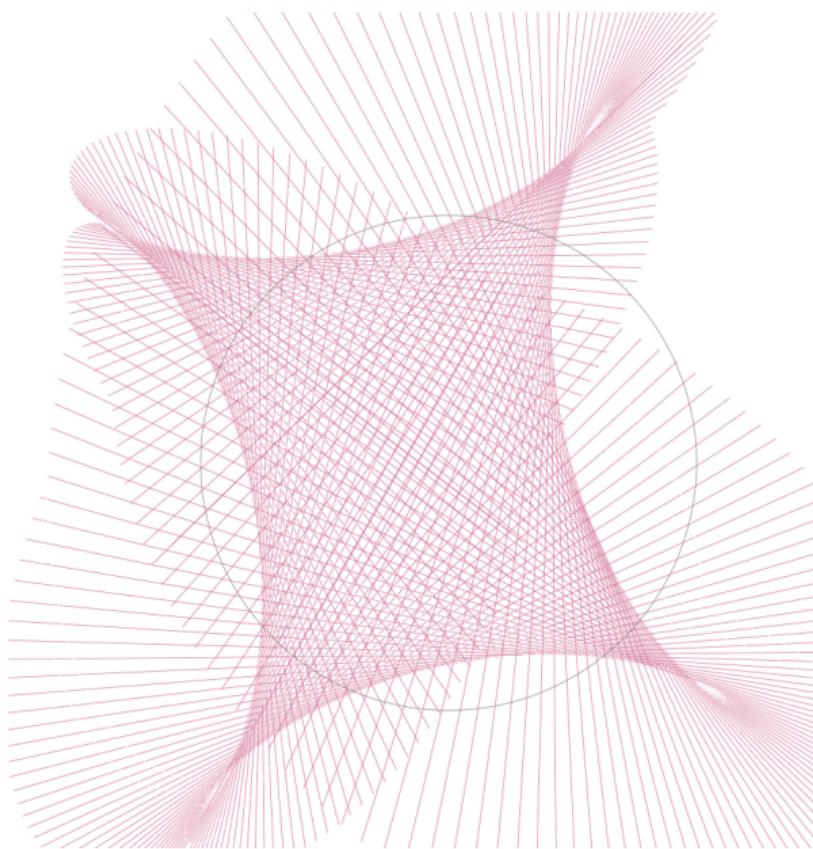
Sur un théorème de Steiner, manuscrit de 1824

Correspondance échangée entre MM. L. Kollros, Zurich et J. Marchand, Lausanne, 1933.

- n points sur un cercle déterminent $\binom{n}{2}$ cordes ;
- si on abaisse d'un point A quelconque du cercle des perpendiculaires à ces cordes, leurs pieds sont 3 à 3 sur $\binom{n}{3}$ droites ;
- si on abaisse de A les perpendiculaires à ces droites, leurs pieds sont 4 à 4 sur $\binom{n}{4}$ droites ;
- puis 5 à 5 sur $\binom{n}{5}$ droites ;
- ...
- on arrive enfin à $\binom{n}{n-1}$ droites, et les pieds des perpendiculaires abaissées de A sont encore alignés. On s'intéresse à l'enveloppe des droites contenant ces points.

Illustration pour $n = 4$ 

- Les 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 sur un cercle déterminent $\binom{4}{2} = 6$ cordes $P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_4$ et P_3P_4 ;
- d'un point A quelconque sur le cercle, on abaisse les perpendiculaires à chacune des 6 cordes ; soit $PP_{12}, PP_{13}, PP_{14}, PP_{23}, PP_{24}$ et PP_{34} les pieds de ces perpendiculaires ;
- les 6 pieds sont alignés 3 à 3 sur $\binom{4}{3} = 4$ droites ;
- à partir du même point A , on abaisse les perpendiculaires sur chacune des 4 droites ; soit a, b, c et d les 4 pieds de ces perpendiculaires ; ils sont alignés (en magenta sur le dessin).



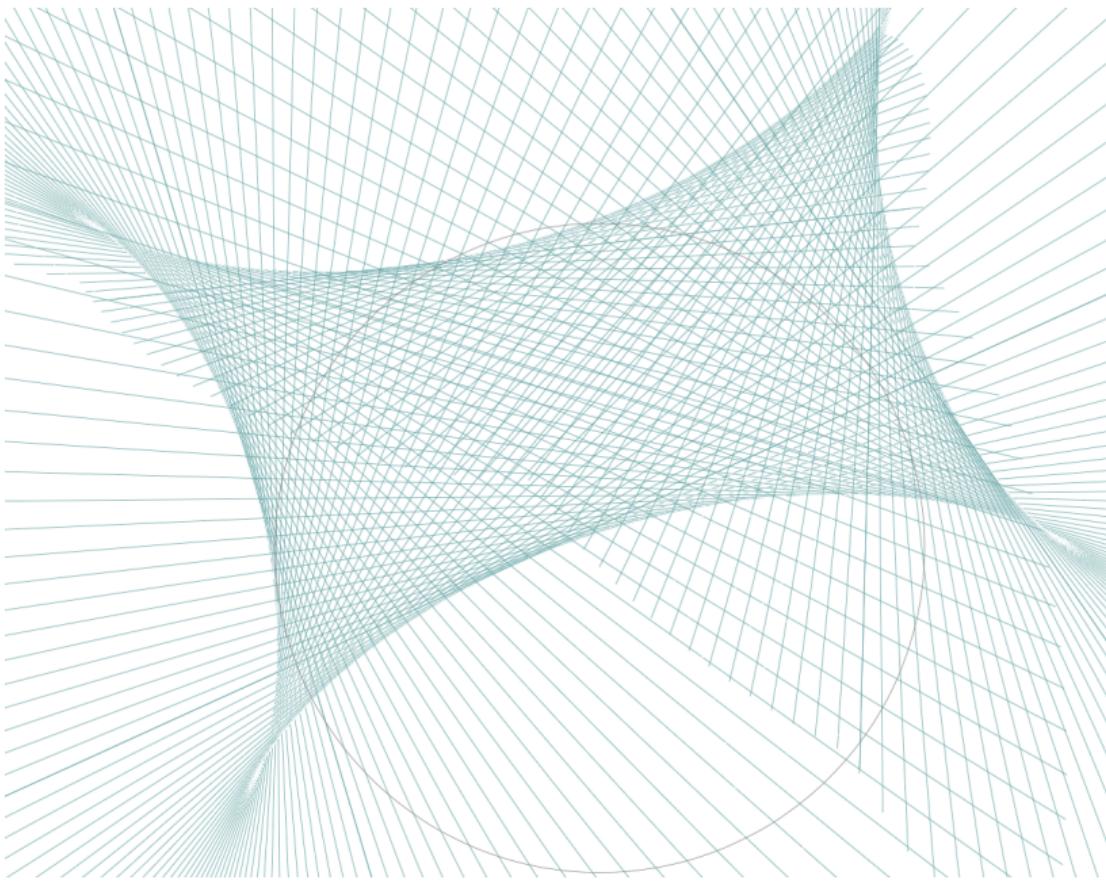
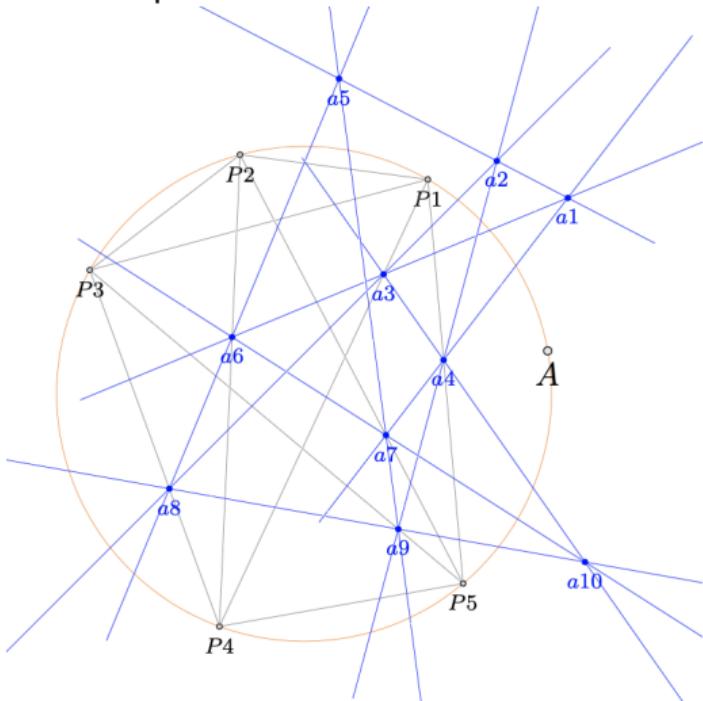
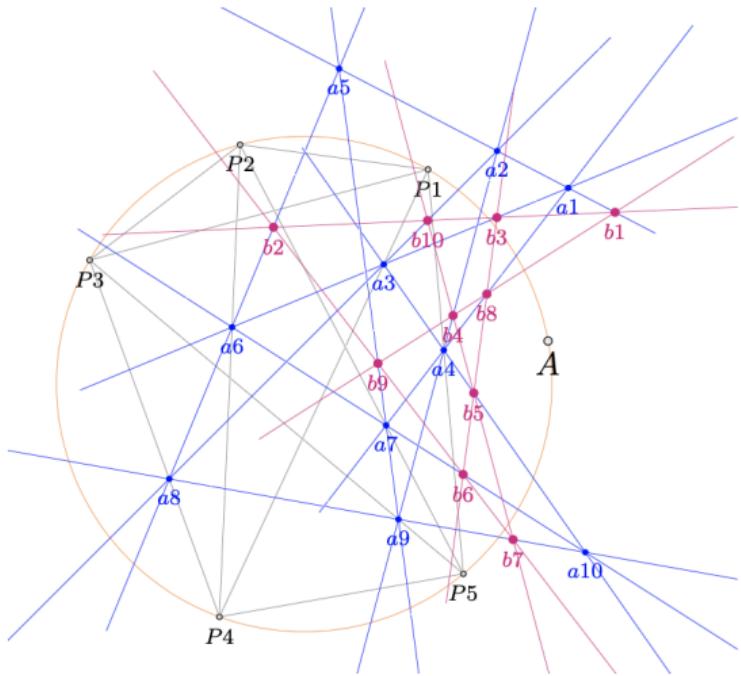
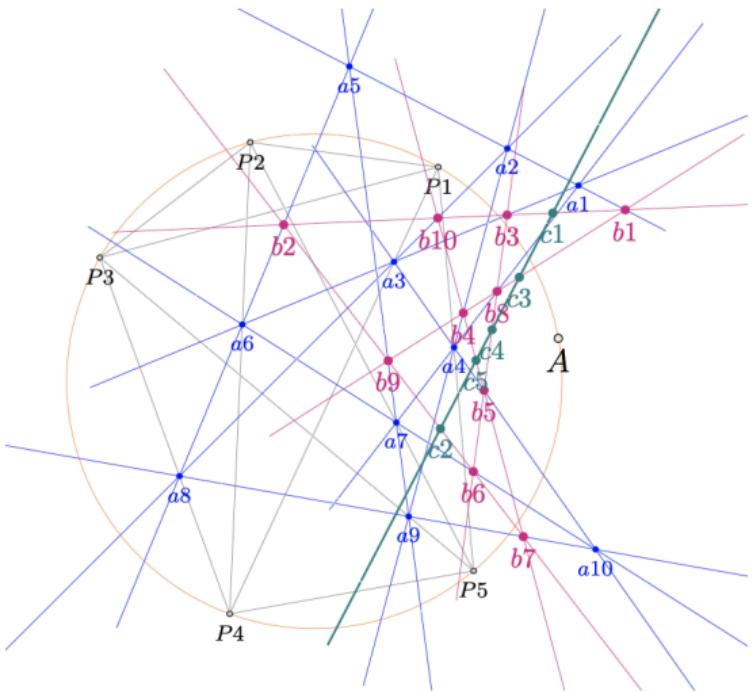


Illustration pour $n = 5$ 

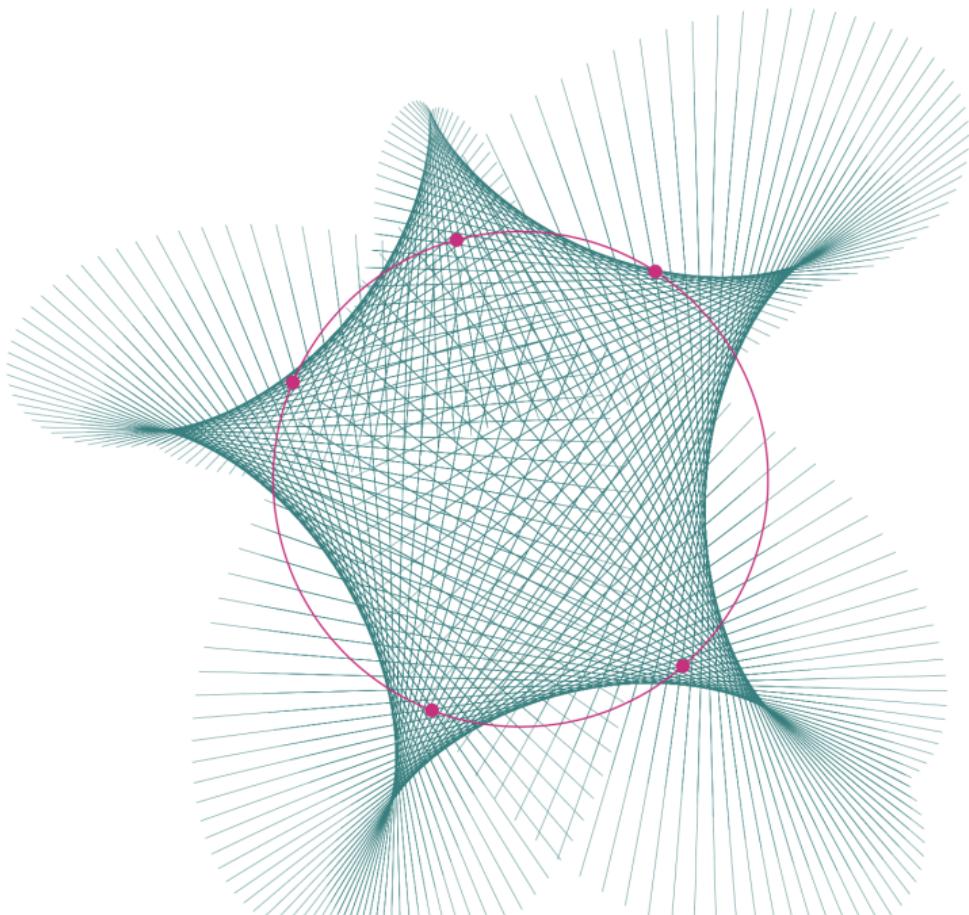
- $\binom{5}{2} = 10$ cordes ;
- 10 pieds alignés 3 à 3 sur $\binom{5}{3} = 10$ droites ;

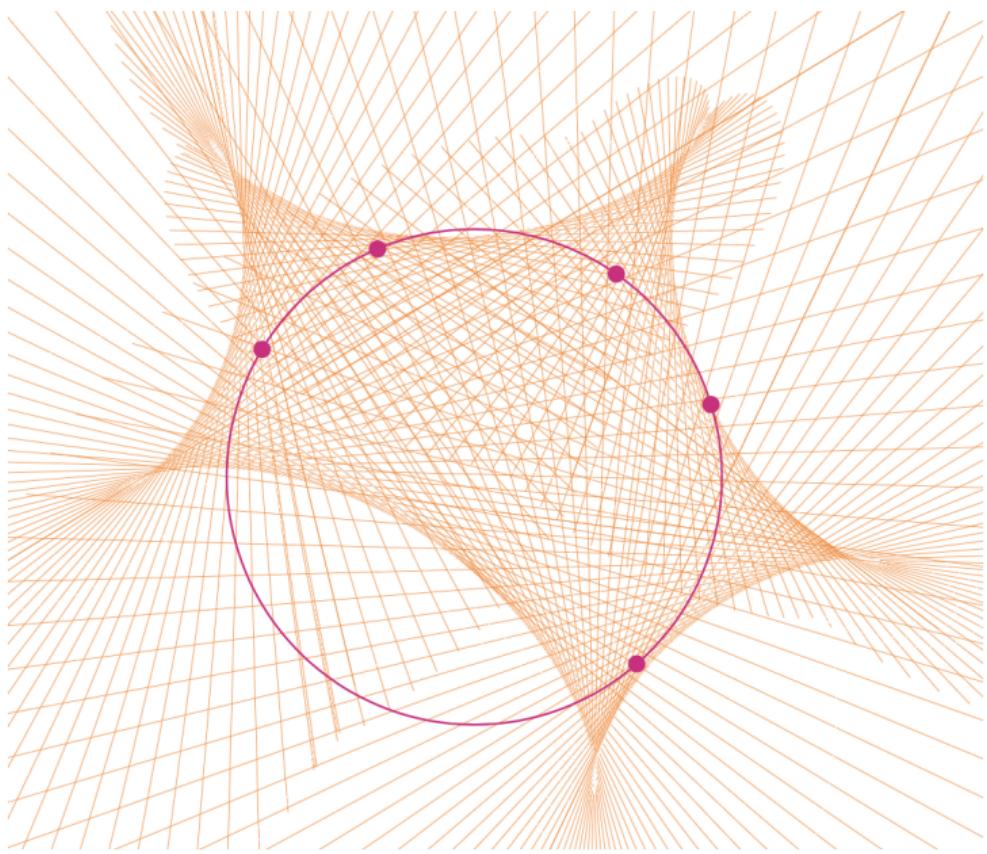


■ 10 pieds alignés 4 à 4 sur $\binom{5}{4} = 5$ droites ;



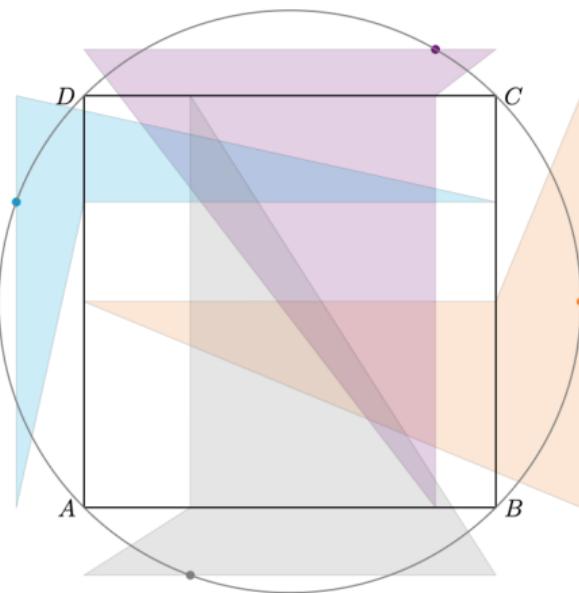
■ 5 pieds alignés 5 à 5 sur $\binom{5}{5} = 1$ droite.



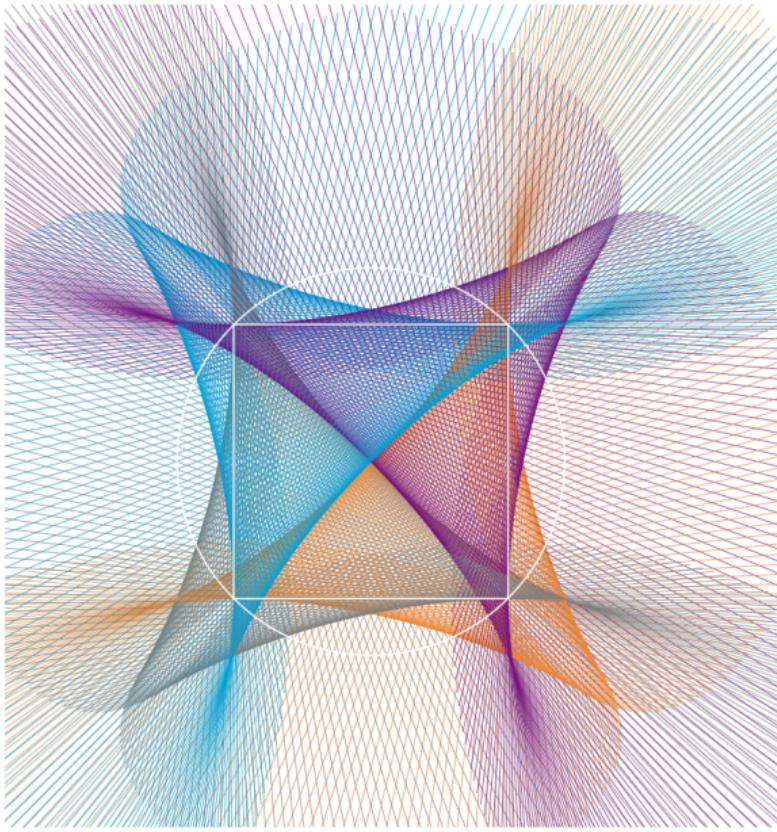


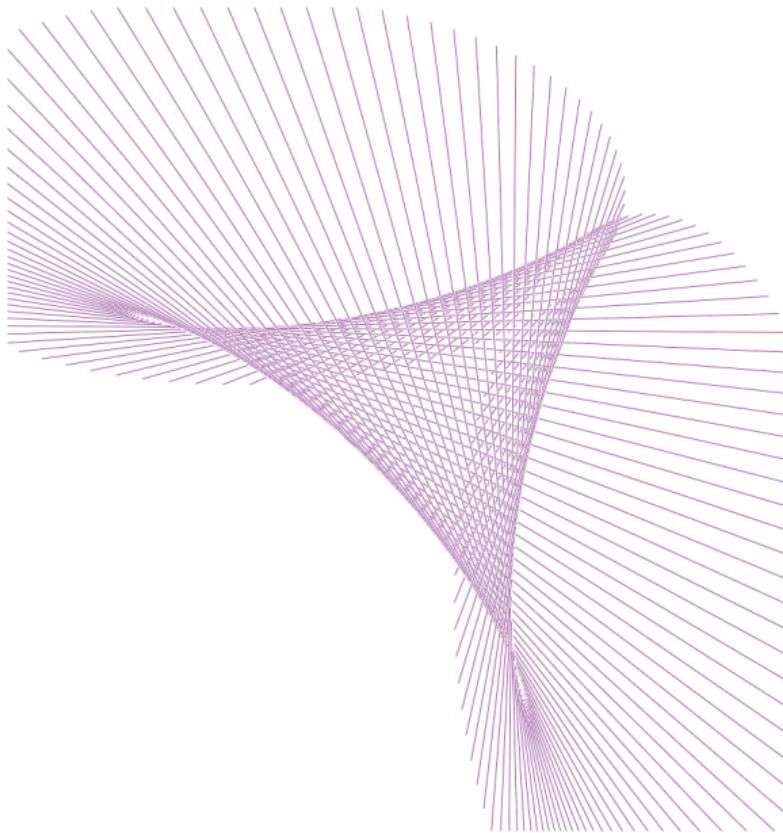
Quadrilatères podaires et leurs enveloppes

- soit un carré $ABCD$ et Γ son cercle circonscrit ;
- de chaque point M de Γ on abaisse la perpendiculaire sur chacun des côtés du carré, éventuellement prolongés ;
- on note a, b, c et d les pieds de ces perpendiculaires, et on appelle « quadrilatère podaire » relatif à M le quadrilatère $abcd$.

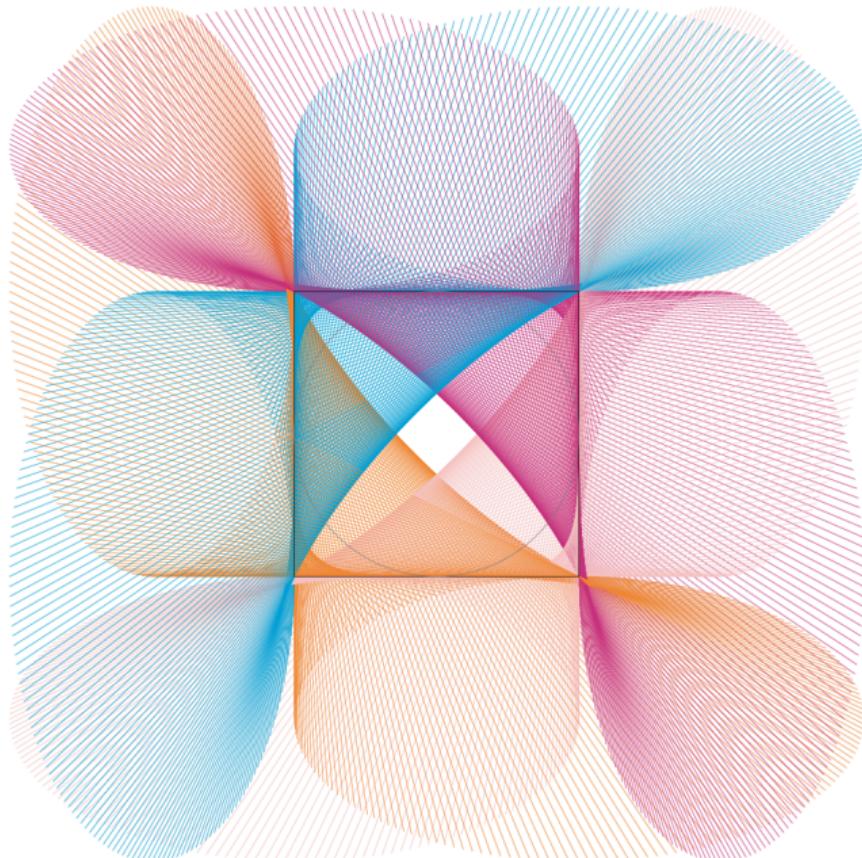


- on dessine les droites ab , bc , cd et ad .

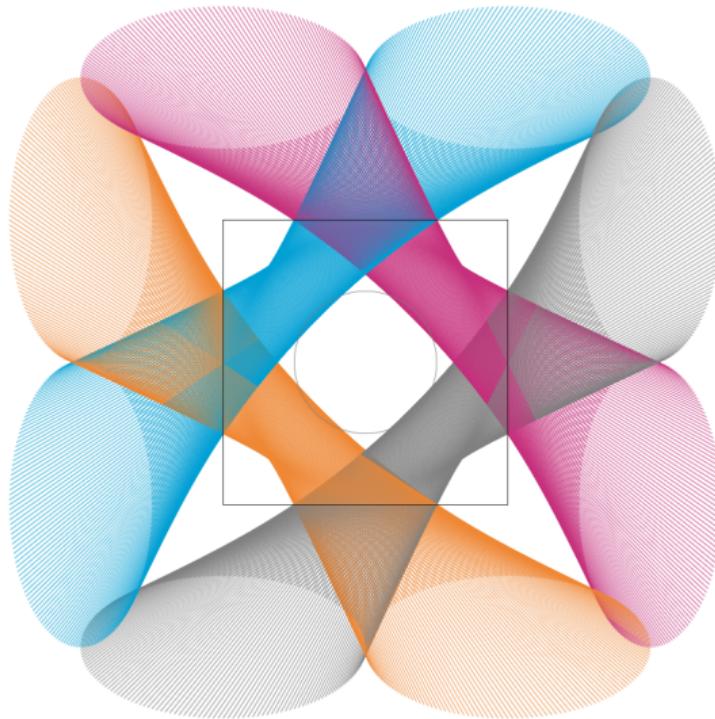




- points M sur le cercle inscrit.



- points M sur un cercle plus petit que le cercle inscrit.



Pentagones podaires et leurs enveloppes

- Mêmes constructions que pour les quadrilatères...

