50^{e} congrès de la Société Belge des Professeurs de mathématiques d'expression française

Binche 2025

φ

Nombre d'or et ses applications

Rachid OUBRAHIM

rchd.oubrahim@gmail.com

Table des matières

Introduction

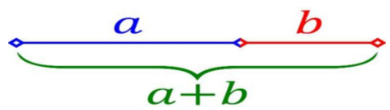
Le nombre d'or, noté par la lettre grecque Phi (φ) et approximativement égal à 1,618, est un rapport mathématique fascinant que l'on retrouve dans de nombreuses structures naturelles et œuvres humaines, allant de la suite de Fibonacci aux proportions en art et en architecture. Il résulte du partage d'un segment en deux parties telles que le rapport du tout au plus grand est égal à celui du plus grand au plus petit. Ce rapport singulier, symbole d'harmonie et de beauté, a captivé depuis l'Antiquité des penseurs tels qu'Euclide, mais aussi des artistes, architectes et scientifiques de toutes époques.

- Comme l'affirmait Leopold Kronecker (1823–1891) : « Dieu a créé les entiers naturels, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »
- Les entiers naturels seraient ainsi, selon certains, créés avec l'univers lui-même. L'homme, grâce à son intelligence et ses besoins, a su les comprendre et les exploiter.
- Progressivement, il a étendu son usage à d'autres types de nombres : les rationnels, les irrationnels, les complexes, etc.
- L'étude des propriétés numériques remonte à des époques très anciennes.
- Les premières motivations venaient de la vie quotidienne : échange commercial, mesure des poids, mais aussi observation astronomique pour établir des calendriers ou répondre à des croyances liées à l'astrologie.
- Ces préoccupations ont mené l'homme à établir des lois et relations entre les nombres, constituant les fondements de l'arithmétique : les nombres premiers, les nombres amicaux, le nombre π, le nombre d'or φ, etc.
- À travers les civilisations et les siècles, l'arithmétique a accompagné l'humanité dans sa vie courante, dans ses structures sociales, économiques et même industrielles, comme l'illustrent les sections suivantes.

1 Utilisation du nombre d'or

Parmi les applications les plus pertinentes et des plus anciennes des nombres, on trouve des applications géométriques de ce qu'on appelle « **nombre d'Or** » : étant donné deux points **A** et **B**, il existe un unique point **M** du segment **AB** tel que le rapport de la distance entre **A** et **B** avec la distance entre **A** et **M** coïncide avec le rapport de la distance entre **A** et **M** avec la distance entre **M** et **B**.

$$A\underline{\hspace{6em}}M\underline{\hspace{3em}}B$$



$$\frac{AM}{AB} = \frac{a+b}{a} = \frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}.$$

- Le rapport de la distance entre A et B avec la distance entre A et M est indépendant de la distance AB, et est donc un nombre fixe qu'on appelle nombre d'Or et qui est égal à $(1+\sqrt{5})/2$.

— En fait ceci vient de l'équation $(a+b)/a = a/b$

— En posant $X = a/b$; l'équation précédente devient

$$1 + 1/X = X$$

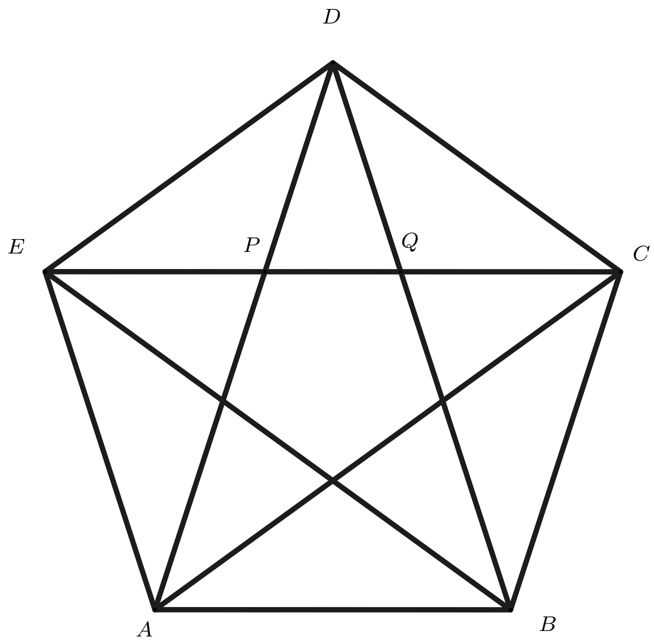
Ce qui est équivalent à

$$1 + X = X^2$$

Dont la solution positif est

$$(1 + \sqrt{5})/2$$

— **Le pentagone régulier :**



DA = DB = AB × nombre d'or.

CD = CB = AB × nombre d'or.

ED = EA = AB × nombre d'or.

Preuve :

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier de côté c et de diagonale d.

On pose P l'intersection des diagonales AD et EC et Q l'intersection des diagonales BD et EC.

On sait que le triangle AED est un triagle isocèle au point E, et puisque $ABCDE$ et un pentagone régulier alors $\widehat{AED} = 108°$, par conséquent $\widehat{EAD} = 36°$, d'où $\widehat{DAB} = \widehat{EAB} - \widehat{EAD} = 72°$.

D'autre part, de la même manière on peut montrer que $\widehat{CED} = \widehat{PED} = \widehat{ADE} = \widehat{PDE} = 36°$, donc $\widehat{CPD} = 180° - \widehat{EPD} = 72°$.

D'où on peut conclure que $(PC) \parallel (AB)$, de même on peut montrer que $(AP) \parallel (BC)$, donc $ABCP$ est un parallélogramme.

D'après Thalès dans le triangle ABD on a

$$\frac{DP}{DA} = \frac{DQ}{DB} = \frac{PQ}{AB} \quad (\star)$$

avec $DP = AD - AP = AD - BC = d - c$.
De la même manirère on peut monter que $EQ = PC = c$.
Or,

$$EQ + PC - PQ = d$$

donc

$$c + c - PQ = d$$

d'où

$$PQ = 2c - d.$$

On remplace dans $(\star)$, on trouve

$$\frac{d-c}{d} = \frac{2c-d}{c}$$

c-à-d

$$1 - \frac{c}{d} = 2 - \frac{d}{c}$$

donc

$$x - \frac{1}{x} - 1 = 0 \quad \text{avec } \frac{c}{d} = x$$

ou

$$x^2 - x - 1 = 0$$

donc par définition du nombre d'or on a $x = \varphi$ c-à-d $\dfrac{d}{c} = \varphi$.

$\blacksquare$

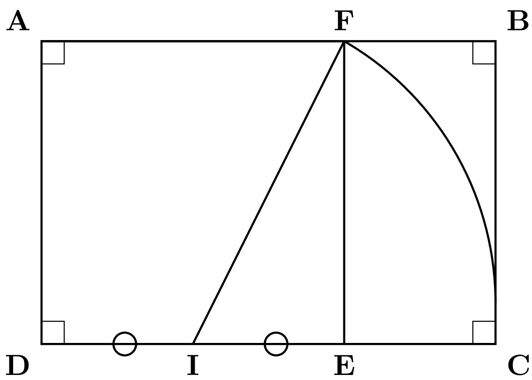
— **Le rectangle d'or :**
C'est un rectangle dont le rapport entre la longueur et la largeur est égal au nombre d'or.

AB ÷ BC = nombre d'or

(ABCD est un rectangle d'or)

BC ÷ BF = nombre d'or

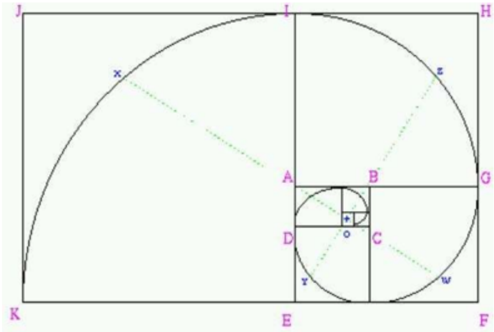
(ECBF est un rectangle d'or)



— Le triangle d'or :
Un triangle d'or est un triangle isocèle d'angles $72°, 72°$ et $36°$. Le rapport du grand côté sur le petit est égal au nombre d'or.

— **Spirale d'or :**

- JHFK, EFHI, AGFE … sont des rectangles d'or construits successivement.
- En construisant les quarts de cercle dans chaque carré, on construit petit à petit la spirale d'or



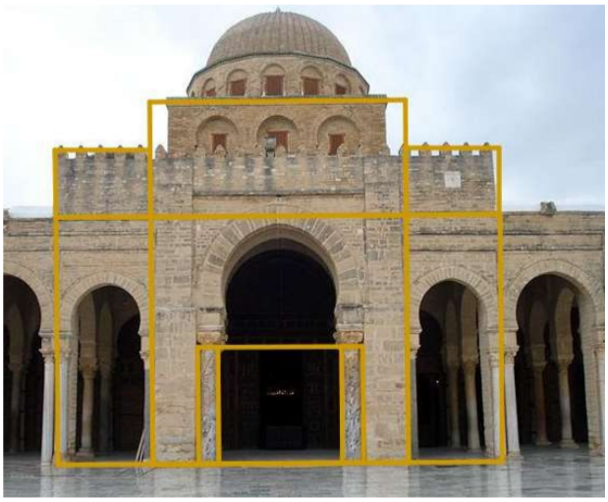
2 L'Architecture et le nombre d'or

La notion de nombre d'Or avait été utilisée en Architecture par les Egyptiens dans la construction de la pyramide de Khéops, en utilisant un rapport d'Or entre la demi- base et la hauteur de la pyramide, et par les Grecs dans la construction du Temple « le Parthénon d'Athènes» en utilisant un rapport d'Or entre largeur et longueur du rectangle constituant le palais.

La pyramide de Khéops

Le Parthénon d'Athènes

2.1 Utilisation du nombre d'or dans l'architecture musulmane : Mosquée Kairaouane :



— Ces constructions sont d'une beauté extraordinaire.
— Ainsi, ce rapport d'Or est devenu un moyen de beauté et d'esthétique.
— Au fil des civilisations, on retrouve l'utilisation du rapport d'Or dans plusieurs endroits : chez les peintres pour trouver le meilleur mélange entre deux couleurs, ou en milieu Financier dans les calculs de dépôts d'argent (« Golden Ratio ») ....
— On le trouve aussi dans la nature, dans le corps Humain ou à travers certaines constructions indistruelles comme dans les voitures et autres. . . .

2.2 Dans la nature :

— Le rapport d'Or entre les feuilles de certains arbres. C'est aussi le rapport d'écartement entre les feuilles des arbres afin d'éviter qu'elles ne se fassent de l'ombre. (l'écartement entre chaque feuille correspond à un angle (360°/ nombre d'or) pour avoir un maximum d'espace et de lumière).

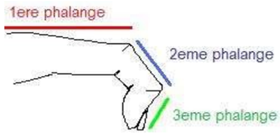
— Si on coupe une pomme en deux on découvre les pépins disposés en une belle étoile à 5 branches. (la présence du pentagone régulier traduit la présence du nombre).

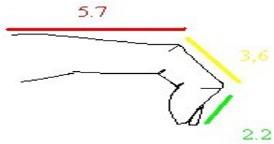
— L'enroulement régulier d'une ammonite (fossile) se fait suivant une spirale d'or géométrique.

— Spirale que l'on retrouve également dans le tournesol.

— Les abeilles

— Corps Humain.
  — la 1ere phalange / la 2eme $\simeq$ nombre d'or
  — la 2eme phalange / la 3eme $\simeq$ nombre d'or

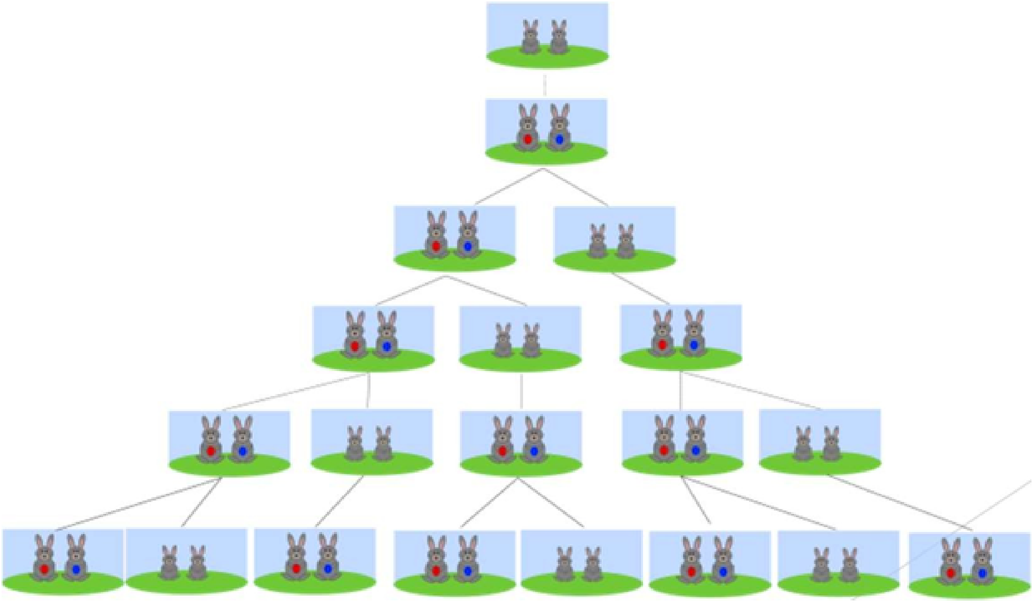




On retrouve une application directe de cette spirale au niveau de l'oreille, . . . spirale qui est inscrite dans un rectangle d'or.

3 La suite de Fibonnacci

— 1 ; 1 ; 2 ;5 ; 8 ; 13 : 21 ; ......
— $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
— ≪ Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtienton en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à copmpter du troisième mois de son exictence ≫.

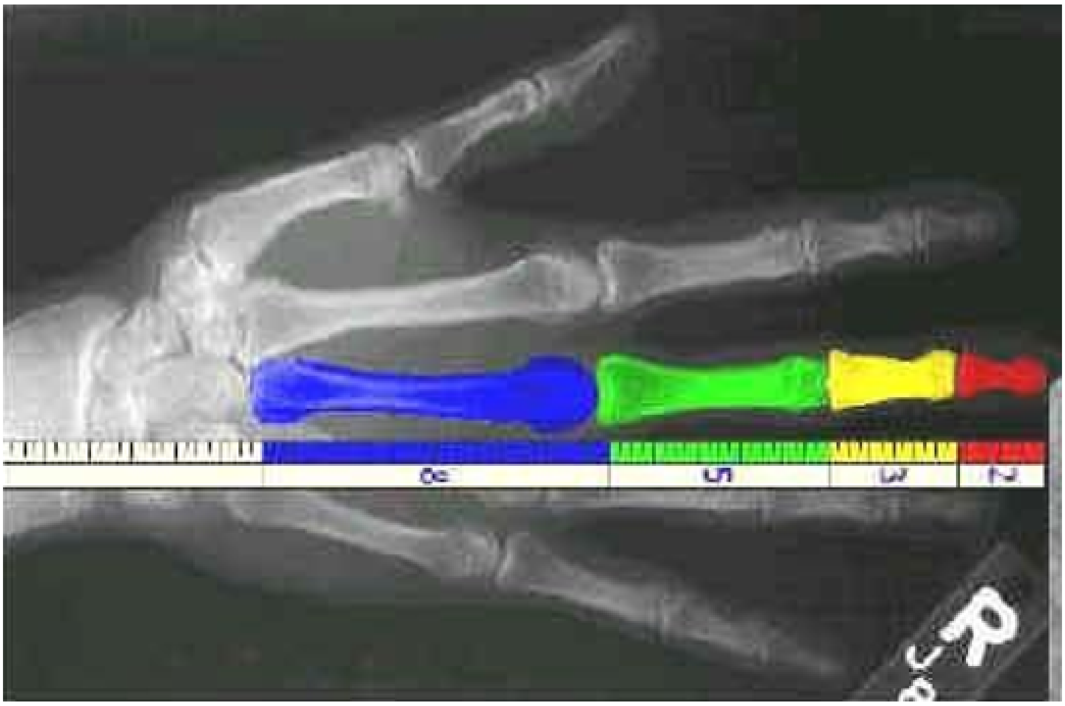


— Le rapport entre deux éléments de la suite c'est Presque le nombre d'Or, et on montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

— Des fleurs ont des nombres de pétales qui correspondent aux nombres de Fibonacci. On trouve des fleurs qui ont 3 pétales (lis), d'autres 5 (bouton d'Or), 8, 13 et même 21, 34, 55 ou 89 pétales (marguerites).

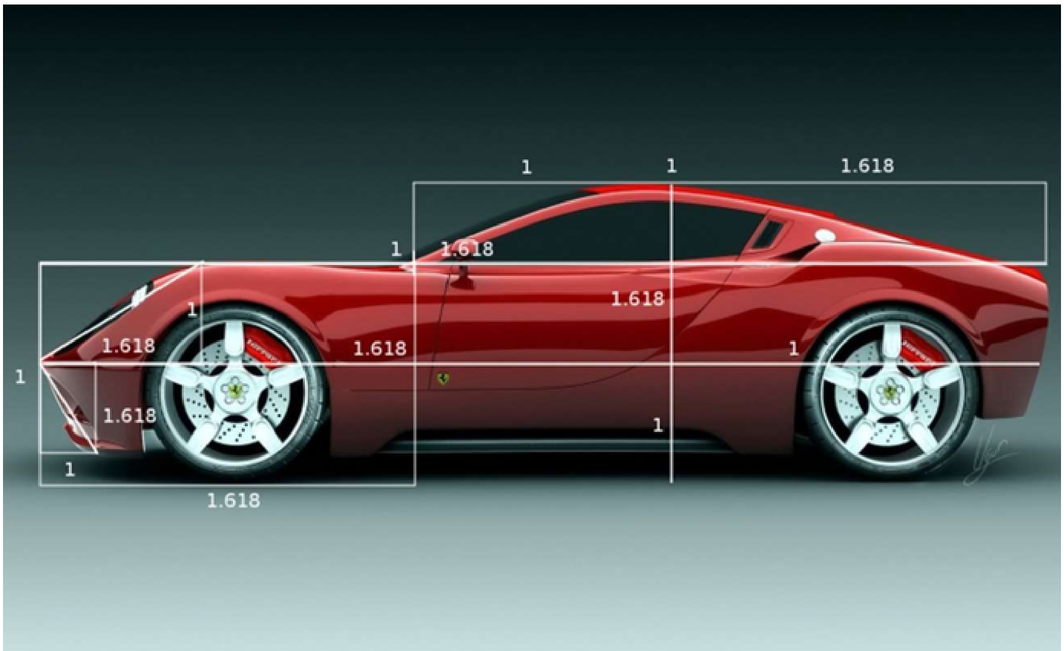
3.1 Fibonnacci dans nos mains :



Si l'on attribue des unités de longueur basées sur la suite de Fibonacci aux différentes phalanges, on obtient une correspondance visuelle :

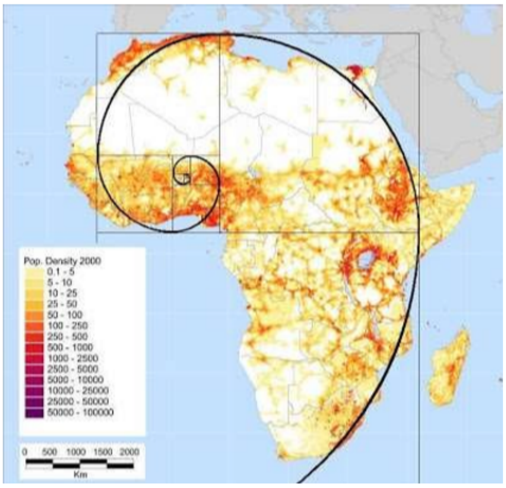
— La plus petite phalange (distale, en jaune et rouge) a une longueur proportionnelle à 2.
— La phalange suivante (moyenne, en vert) a une longueur proportionnelle à 3.
— La plus grande phalange (proximale, en bleu) a une longueur proportionnelle à 5.
— Souvent, l'os métacarpien correspondant dans la paume (non coloré) aurait une longueur proportionnelle à 8.

3.2 L'ingénierie des automobiles et le nombre d'Or :



1. **Le Quadrillage du nombre d'or :**
   — On observe une grille complexe de rectangles imbriqués et juxtaposés qui divisent la carrosserie de la voiture.
   — Les côtés de ces rectangles sont étiquetés avec les valeurs "1" et "1.618". Ces chiffres représentent le rapport du nombre d'or. Un côté étant "1" unité, l'autre côté de ce rectangle d'or sera "1.618" fois plus grand.
2. **Points d'application clés :**
   — **Proportion générale :** Le rectangle englobant la voiture entière pourrait être un rectangle d'or, suggérant que la longueur totale par rapport à la hauteur est basée sur ce rapport.
   — **Positionnement des éléments :**
   - **Roues :** Les centres des roues, leurs diamètres, et leur positionnement par rapport au reste de la carrosserie sont définis par des lignes qui respectent ce rapport de 1 :1.618.
   - **Portes et fenêtres :** Les cadres des fenêtres, la longueur des portes, et la division entre le capot et l'habitacle sont souvent délimités par des segments dont les longueurs sont dans un rapport d'or.
   - **Détails de carrosserie :** Même des éléments plus petits comme la position du logo Ferrari sur le flanc, la ligne de caractère qui parcourt la carrosserie, ou l'inclinaison du pare-brise, peuvent être intentionnellement (ou non) alignés sur ces proportions.
3. **L'effet esthétique :**
   — L'utilisation du nombre d'or n'est pas une simple coïncidence ; elle est souvent une démarche délibérée des designers pour créer une forme qui est perçue comme intrinsèquement équilibrée, harmonieuse et attrayante par l'œil humain.
   — La présence répétée de ce rapport à travers le design du véhicule contribue à une sensation de fluidité et de cohérence visuelle.

3.3 L'Afrique et l'or :



1. **La Carte de gauche (Géographie physique)**
   — Sur cette vue satellite, la spirale d'or est positionnée de manière à ce que sa courbe épouse la forme de la côte ouest-africaine. Le point de départ de la spirale se situe dans le Golfe de Guinée, et son arche principale suit le littoral jusqu'à l'Afrique du Nord.
   — Cette superposition suggère que les formes naturelles à très grande échelle, comme les contours d'un continent, peuvent refléter des modèles de croissance mathématiques. Elle laisse entrevoir une harmonie géométrique inhérente à la structure même de notre planète.
2. **La Carte de droite (Densité de population)**
   — C'est l'illustration la plus frappante. La spirale est superposée à une carte montrant la densité de population (les zones les plus claires sont les plus peuplées).
   - Le centre de la spirale coïncide presque parfaitement avec l'un des foyers de population les plus denses d'Afrique : le sud du Nigeria et la région du delta du Niger.
   - En suivant la courbe de la spirale vers l'extérieur, on voit qu'elle relie d'autres zones à forte densité de population, comme la région des Grands Lacs, la Corne de l'Afrique et enfin la vallée du Nil en Égypte.

   — Cette carte suggère que la distribution et l'expansion des populations humaines sur le continent ne sont pas aléatoires. Elles semblent suivre un modèle de croissance naturel, en "spirale", qui s'étend à partir d'un point d'origine dense. Cela pourrait être lié à des facteurs historiques, migratoires ou géographiques qui, ensemble, dessinent ce motif harmonieux.