Quelques “paradoxes” en probabilités

Matthieu Simon

Université de Mons

Binche, 19 août 2025

Table des matières

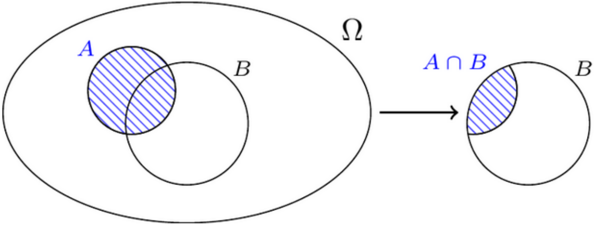
Table des matières

Probabilités conditionnelles

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A, B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$.
La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



Probabilités conditionnelles

Conditionner revient à **ajouter de l'information** sur les probabilités qu'ont les événements de se réaliser lors de l'expérience aléatoire.

Probabilités conditionnelles

Conditionner revient à **ajouter de l'information** sur les probabilités qu'ont les événements de se réaliser lors de l'expérience aléatoire.

Exemple : on s'intéresse au résultat du lancer d'un dé, avec ou sans l'information $B =$ [le résultat du dé est pair] :

A	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(A)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$P(A \mid B)$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Bayes et probabilités totales

Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A, B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$. Alors

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}.$$

Bayes et probabilités totales

Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A, B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$. Alors

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}.$$

Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $B \in \mathcal{A}$,

$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ une partition de Ω.

Alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

Table des matières

Paradoxe de Simpson

Paradoxe de Simpson

"Une tendance observée dans plusieurs sous-groupes de données peut s'inverser lorsque les données sont combinées."

Paradoxe de Simpson

Paradoxe de Simpson

"Une tendance observée dans plusieurs sous-groupes de données peut s'inverser lorsque les données sont combinées."

Exemple :

- Une classe compte chaque année 100 élèves.
- Chaque élève a le choix entre un examen écrit ou un oral.
- Les nombres de réussites pour les deux dernières années sont :

	Examen écrit	Examen oral
2024	$20/50$	$40/50$
2025	$7/20$	$60/80$

Paradoxe de Simpson

Paradoxe de Simpson

Il est possible d'avoir simultanément que

$$P(A \mid B, C) > P(A \mid B^c, C) \quad \text{et} \quad P(A \mid B, C^c) > P(A \mid B^c, C^c),$$

et que $P(A \mid B) < P(A \mid B^c)$.

Paradoxe de Simpson

Il est possible d'avoir simultanément que

$$P(A \mid B, C) > P(A \mid B^c, C) \quad \textit{et} \quad P(A \mid B, C^c) > P(A \mid B^c, C^c),$$

et que $P(A \mid B) < P(A \mid B^c)$.

Exemple :

	Examen écrit	Examen oral
2024	$20/50$	$40/50$
2025	$7/20$	$60/80$

- $A = [\,$l'étudiant réussit son examen$\,]$,
- $B = [\,$l'étudiant présente l'examen en 2024$\,]$,
- $C = [\,$l'étudiant choisit l'examen écrit$\,]$.

Paradoxe de Simpson

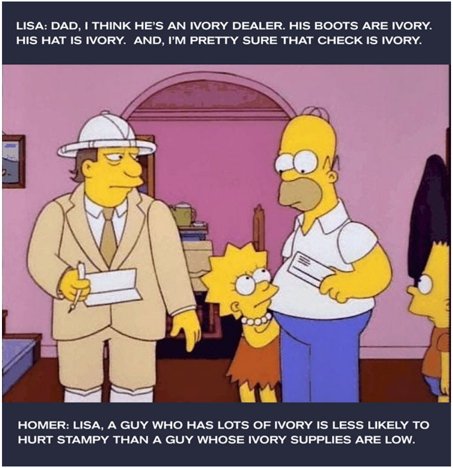


Table des matières

Tests de dépistage

Question

Une maladie infectieuse grave est présente dans une population. On dispose d'un test de dépistage. On sait que

- Le test a 95% de chances de détecter l'infection chez un malade,
- Le test fournit un faux positif dans 1% des cas.

On estime qu'une personne sur 200 est touchée par l'infection.

Tests de dépistage

Question

Une maladie infectieuse grave est présente dans une population. On dispose d'un test de dépistage. On sait que

- Le test a 95% de chances de détecter l'infection chez un malade,
- Le test fournit un faux positif dans 1% des cas.

On estime qu'une personne sur 200 est touchée par l'infection.

Supposons que l'infection est mortelle sans traitement. L'unique moyen de la soigner est une opération risquée.

Un médecin, confronté à un patient testé positif, devrait-il conseiller l'opération ?

Tests de dépistage

Prenons un individu au hasard dans la population, et notons

$$\begin{aligned} A &= [\text{l'individu est porteur de l'infection}], \\ B &= [\text{l'individu est testé positif}]. \end{aligned}$$

Tests de dépistage

Prenons un individu au hasard dans la population, et notons

$$A = [\text{l'individu est porteur de l'infection}],$$
$$B = [\text{l'individu est testé positif}].$$

En appliquant la formule de Bayes puis la formules des probas totales,

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{\frac{95}{100} \cdot \frac{1}{200}}{\frac{95}{100} \cdot \frac{1}{200} + \frac{1}{100} \cdot \frac{199}{200}} = 0.32. \end{aligned}$$

Tests de dépistage

Prenons un individu au hasard dans la population, et notons

$$A = [\text{l'individu est porteur de l'infection}],$$
$$B = [\text{l'individu est testé positif}].$$

En appliquant la formule de Bayes puis la formules des probas totales,

$$\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{\frac{95}{100} \cdot \frac{1}{200}}{\frac{95}{100} \cdot \frac{1}{200} + \frac{1}{100} \cdot \frac{199}{200}} = 0.32.
\end{aligned}$$

Cette probabilité est beaucoup plus petite que ce qu'on pourrait penser à priori ... Moins d'un tiers des testés positifs sont réellement infectés !

(En cause : la faible proportion d'individus contagieux dans la population).

Tests de dépistage

En d'autres termes, les probabilités jointes liées à l'état d'un individu pris au hasard et au résultat de son test sont :

	testé positif	testé négatif
sain	0.01	0.9850
infecté	0.00475	0.00025

Tests de dépistage

En d'autres termes, les probabilités jointes liées à l'état d'un individu pris au hasard et au résultat de son test sont :

	testé positif	testé négatif
sain	0.01	0.9850
infecté	0.00475	0.00025

Pour une population testée de 20.000 individus, on a en moyenne :

	testé positif	testé négatif
sain	200	19700
infecté	95	5

Tests de dépistage

Si la population compte 20.000 individus et est entièrement testée, on aura en moyenne :

	testé positif	testé négatif
sain	200	19700
infecté	95	5

Si on décide d'opérer les cas positifs, 200 des 295 individus le seront sans raison !

Tests de dépistage

Pourquoi a-t-on comme première impression que le test est très fiable ? Parce que les probabilités

$$P(B \mid A) = P(\text{testé positif} \mid \text{infecté}) = 0.95,$$
$$P(B^c \mid A^c) = P(\text{testé négatif} \mid \text{sain}) = 0.99,$$

sont très élevées.

Tests de dépistage

Pourquoi a-t-on comme première impression que le test est très fiable ? Parce que les probabilités

$$P(B \mid A) = P(\text{testé positif} \mid \text{infecté}) = 0.95,$$
$$P(B^c \mid A^c) = P(\text{testé négatif} \mid \text{sain}) = 0.99,$$

sont très élevées.

Mais ce ne sont pas les probabilités les plus importantes ici, on s'intéresse surtout à

$$P(A \mid B) = P(\text{infecté} \mid \text{testé positif}) = 0.32,$$

qui est beaucoup moins satisfaisante...

Le "paradoxe" vient donc d'une confusion entre $P(A \mid B)$ et $P(B \mid A)$.

L'affaire Sally Clark

- En 1998, Sally Clark, une jeune femme anglaise, est poursuivie suite aux décès consécutifs de deux de ses enfants en bas âge.

L'affaire Sally Clark

- En 1998, Sally Clark, une jeune femme anglaise, est poursuivie suite aux décès consécutifs de deux de ses enfants en bas âge.
- Lors du procès, l'expert pédiatre Roy Madow déclare à la Court qu'il est très improbable que ces deux morts soient "accidentelles" (syndrome de la mort subite).

"une mort subite d'enfant est une tragédie, deux morts subites c'est suspect, et trois c'est un meurtre, jusqu'à preuve du contraire"

L'affaire Sally Clark

- En 1998, Sally Clark, une jeune femme anglaise, est poursuivie suite aux décès consécutifs de deux de ses enfants en bas âge.
- Lors du procès, l'expert pédiatre Roy Madow déclare à la Court qu'il est très improbable que ces deux morts soient "accidentelles" (syndrome de la mort subite).

  "une mort subite d'enfant est une tragédie, deux morts subites c'est suspect, et trois c'est un meurtre, jusqu'à preuve du contraire"

- Sally Clark est reconnue coupable de meurtre et incarcérée.

L'affaire Sally Clark

Le raisonnement de Roy Madow est très simpl(iste) :

- La probabilité qu'un nourrisson meure de mort subite est de $\frac{1}{8500}$.

L'affaire Sally Clark

Le raisonnement de Roy Madow est très simpl(iste) :

- La probabilité qu'un nourrisson meure de mort subite est de $\frac{1}{8500}$.
- La probabilité que les deux enfants de Sally soient morts de mort subite est donc de

$$\frac{1}{8500} \cdot \frac{1}{8500} \approx \frac{1}{72\,\text{millions}},$$

ce qui est négligeable.

L'affaire Sally Clark

Le raisonnement de Roy Madow est très simpl(iste) :

- La probabilité qu'un nourrisson meure de mort subite est de $\frac{1}{8500}$.
- La probabilité que les deux enfants de Sally soient morts de mort subite est donc de

  $$\frac{1}{8500} \cdot \frac{1}{8500} \approx \frac{1}{72\,\text{millions}},$$

  ce qui est négligeable.
- La probabilité complémentaire est interprétée comme celle que Sally soit coupable de meurtre (sauf si elle arrive à prouver son innocence).

L'affaire Sally Clark

Il y a (au moins) deux problèmes majeurs dans ce raisonnement :

- Il suppose que les événements "Le premier enfant de Sally meurt de mort subite" et "Le deuxième enfant de Sally meurt de mort subite" sont indépendants.

L'affaire Sally Clark

Il y a (au moins) deux problèmes majeurs dans ce raisonnement :

- Il suppose que les événements “Le premier enfant de Sally meurt de mort subite” et “Le deuxième enfant de Sally meurt de mort subite” sont indépendants.
- Mais surtout, confusion entre deux probabilités conditionnelles !

L'affaire Sally Clark

Il y a (au moins) deux problèmes majeurs dans ce raisonnement :

- Il suppose que les événements "Le premier enfant de Sally meurt de mort subite" et "Le deuxième enfant de Sally meurt de mort subite" sont indépendants.
- Mais surtout, confusion entre deux probabilités conditionnelles !

$$\text{Notons} \quad \begin{aligned} I &= [\text{Sally est innocente}], \\ M &= [\text{les deux enfants de Sally meurent en bas âge}]. \end{aligned}$$

Pour établir la culpabilité de Sally, il se base sur le fait que $P(M \mid I)$ est très petite...

Mais c'est la probabilité $P(I \mid M)$ qui importe pour déterminer si Sally est coupable ou non !

L'affaire Sally Clark

En appliquant la formule de Bayes puis la formules des probas totales,

$$P(I \mid M) = \frac{P(M \mid I)P(I)}{P(M)}$$
$$= \frac{P(M \mid I)P(I)}{P(M \mid I)P(I) + P(M \mid I^c)P(I^c)}.$$

La probabilité d'innocence "à priori", $P(I)$, est très proche de 1
(les doubles infanticides sont très rares).

L'affaire Sally Clark

En appliquant la formule de Bayes puis la formules des probas totales,

$$P(I \mid M) = \frac{P(M \mid I)P(I)}{P(M)}$$
$$= \frac{P(M \mid I)P(I)}{P(M \mid I)P(I) + P(M \mid I^c)P(I^c)}.$$

La probabilité d'innocence "à priori", $P(I)$, est très proche de 1 (les doubles infanticides sont très rares).

Si $P(I^c)$ est assez petit, le second terme du dénominateur est négligeable, et

$$P(I \mid M) \approx 1.$$

Table des matières

Paradoxe des deux enfants

Dans les années 50, Martin Gardner publie les deux problèmes suivants :

Problèmes

(i) Mr Jones a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant que l'enfant le plus agé est une fille ?

(ii) Mr Smith a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant qu'au moins un des enfants est une fille ?

Paradoxe des deux enfants

Dans les années 50, Martin Gardner publie les deux problèmes suivants :

Problèmes

(i) Mr Jones a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant que l'enfant le plus agé est une fille ?

(ii) Mr Smith a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant qu'au moins un des enfants est une fille ?

Il donne les solutions suivantes :

Problème (i) : probabilité $\frac{1}{2}$.

Problème (ii) : probabilité $\frac{1}{3}$.

Paradoxe des deux enfants

Hypothèses :

- chaque enfant est soit un garçon, soit une fille,
- chaque enfant nait garçon ou fille avec la même probabilité $\frac{1}{2}$,
- connaitre le sexe du premier enfant ne donne pas d'information sur celui du second, et vice-versa (indépendance).

Paradoxe des deux enfants

Hypothèses :

- chaque enfant est soit un garçon, soit une fille,
- chaque enfant nait garçon ou fille avec la même probabilité $\frac{1}{2}$,
- connaitre le sexe du premier enfant ne donne pas d'information sur celui du second, et vice-versa (indépendance).

Alors,

$$(i) \quad P(2 \text{ filles} \,|\, \text{aîné} = \text{fille}) = \frac{P(2 \text{ filles}, \text{aîné} = \text{fille})}{P(\text{aîné} = \text{fille})} = \frac{P(2 \text{ filles})}{P(\text{aîné} = \text{fille})}$$

$$= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

Paradoxe des deux enfants

Hypothèses :

- chaque enfant est soit un garçon, soit une fille,
- chaque enfant nait garçon ou fille avec la même probabilité $\frac{1}{2}$,
- connaitre le sexe du premier enfant ne donne pas d'information sur celui du second, et vice-versa (indépendance).

Alors,

$$(i) \quad P(2 \text{ filles} \,|\, \text{aîné} = \text{fille}) = \frac{P(2 \text{ filles}, \text{aîné} = \text{fille})}{P(\text{aîné} = \text{fille})} = \frac{P(2 \text{ filles})}{P(\text{aîné} = \text{fille})}$$

$$= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$(ii) \quad P(2 \text{ filles} \,|\, \text{min. une fille}) = \frac{P(2 \text{ filles}, \text{min. une fille})}{P(\text{min. une fille})} = \frac{P(2 \text{ filles})}{P(\text{min. une fille})}$$

$$= \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Plus surprenant, ajouter des informations à priori anodines modifie encore la probabilité obtenue :

Problème

(ii bis) Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant qu'au moins un des enfants est une fille née en hiver ?

(on suppose ici que les chances de naissance à chaque saison sont égales et indépendantes du sexe de l'enfant).

Paradoxe des deux enfants

Notons $F_h = [\text{un des enfants est une fille née en hiver}]$. Alors,

$$P(2 \text{ filles} \mid F_h) = \frac{P(2 \text{ filles}, F_h)}{P(F_h)}.$$

Comme

$$\begin{aligned} P(F_h) &= 1 - P(\text{aucune fille d'hiver}) \\ &= 1 - P(\text{cadet} \neq \text{fille d'hiver}) P(\text{aîné} \neq \text{fille d'hiver}) \\ &= 1 - \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

et

$$P(2 \text{ filles}, F_h) = \frac{7}{64},$$

on a finalement que

$$P(2 \text{ filles} \mid F_h) = \mathbf{\frac{7}{15}}.$$

Paradoxe des deux enfants

On peut généraliser le problème précédent :

Problème

(ii ter) Soit C une caractéristique que chaque enfant obtient à la naissance avec probabilité p, indépendamment de son sexe et de si ses frères et sœurs l'ont obtenue.

Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant qu'au moins un des enfants est une fille née avec la caractéristique C ?

Paradoxe des deux enfants

On peut généraliser le problème précédent :

Problème

(ii ter) Soit C une caractéristique que chaque enfant obtient à la naissance avec probabilité p, indépendamment de son sexe et de si ses frères et sœurs l'ont obtenue.

Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles, sachant qu'au moins un des enfants est une fille née avec la caractéristique C ?

Ici, la probabilité obtenue est $\mathbf{\frac{2-p}{4-p}}$.

Table des matières

Le problème de Monty Hall

Ce problème est inspiré (librement) de “Let’s make a deal”, un jeu télévisé américain présenté par Monty Hall de 1963 à 1986.

Le problème de Monty Hall

Le problème est le suivant :

- Un candidat est mené devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture, derrière les deux autres une chèvres.

Le problème de Monty Hall

Le problème est le suivant :

- Un candidat est mené devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture, derrière les deux autres une chèvres.
- Le candidat choisit une porte.

Le problème de Monty Hall

Le problème est le suivant :

- Un candidat est mené devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture, derrière les deux autres une chèvres.
- Le candidat choisit une porte.
- Le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre alors une porte non-choisie et cachant une chèvre
  (s'il a le choix entre deux portes, il choisit au hasard).

Le problème de Monty Hall

Le problème est le suivant :

- Un candidat est mené devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture, derrière les deux autres une chèvres.
- Le candidat choisit une porte.
- Le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre alors une porte non-choisie et cachant une chèvre

  (s'il a le choix entre deux portes, il choisit au hasard).
- Le présentateur offre la possibilité au joueur de changer de porte avant de découvrir son prix.

Le problème de Monty Hall

Problème

Le candidat devrait-il décider de changer de porte ?

Ce choix a-t-il une influence sur sa probabilité de remporter la voiture ?

Le problème de Monty Hall

Sans changer de porte, **une chance sur trois** de gagner.

En changeant de porte, **deux chances sur trois** de gagner.

Le problème de Monty Hall

En effet, supposons qu'initialement, le joueur choisit la porte 1.

Notons $S =$ [le joueur gagne la voiture] et $C_i =$ [la voiture est en porte i].

Dans le cas où le joueur ne change pas de porte,

$$P(S) = P(C_1) = \frac{1}{3}.$$

Dans le cas où il décide de changer de porte,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \mid C_1)P(C_1) + P(S \mid C_2 \cup C_3)P(C_2 \cup C_3) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Le problème de Monty Hall

Les probabilités de gagner conditionnellement à quelle porte est ouverte par le présentateur sont les mêmes. Par exemple, dans le cas où le joueur choisit la porte 1 puis décide de changer de porte après avoir observé

$B =$ [le présentateur ouvre la porte2],

$$
\begin{aligned}
P(S \mid B) &= P(C_3 \mid B) \\
&= \frac{P(B \mid C_3)P(C_3)}{P(B \mid C_1)P(C_1) + P(B \mid C_2)P(C_2) + P(B \mid C_3)P(C_3)} \\
&= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

End

Merci pour votre attention !