

Les trois théorèmes de CARNOT

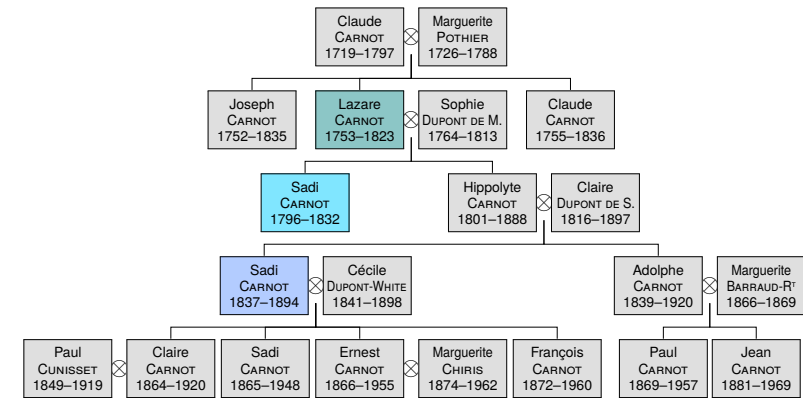
Pascal DUPONT
pascal.dupont@uliege.be

ex-HEC•ULiège

Liège, Congrès SBPMef
18 août 2026

La famille CARNOT

Des CARNOT : un peu, beaucoup ?



(Arbre très allégé !)

Lazare CARNOT

- ▶ Lazare Nicolas Marguerite CARNOT,
- ▶ Né à Nolay (Côte-d'Or) le 13/05/1753, mort à Magdebourg (Prusse) le 02/08/1823
- ▶ Homme de lettres, mathématicien, physicien, militaire et homme d'état français
- ▶ « Le Grand CARNOT », l'« Organisateur de la Victoire »
- ▶ Député à l'Assemblée législative (1791), membre du Comité de salut public (1793), membre du Directoire (1795)
- ▶ Exclu de ce dernier deux ans plus tard (1^{er} exil en Allemagne)
- ▶ Rappelé par Napoléon BONAPARTE en 1800 : ministre, général
- ▶ Sous la Restauration, en 1816, condamné comme régicide
- ▶ Exil à Varsovie puis à Magdebourg, où il termine sa vie
- ▶ Inhumé au Panthéon en 1889



Sadi (1) CARNOT



- ▶ Nicolas Léonard *Sadi* CARNOT
- ▶ Fils du précédent
- ▶ Né à Paris le 01/06/1796, mort (du choléra) à Ivry-sur-Seine le 24/08/1832
- ▶ Physicien et ingénieur français
- ▶ Ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (1824) posent les bases de la thermodynamique, dont il énonce le second principe, selon lequel l'entropie d'un système croît avec le temps.

Le théorème « japonais » de CARNOT

Sadi (2) CARNOT

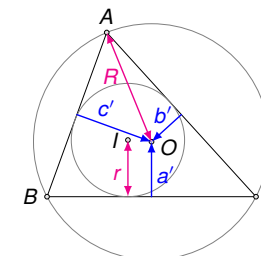


- ▶ Marie François *Sadi* CARNOT
- ▶ Neveu du précédent, fils d'Hippolyte, le frère cadet de Sadi (1)
- ▶ Né à Limoges le 11/08/1837, mort à Lyon le 25/06/1894
- ▶ Ingénieur et homme d'état français, polytechnicien
- ▶ Député en 1871, ministre en 1885
- ▶ Président de la République française de 1887 à sa mort sous le poignard d'un anarchiste
- ▶ Inhumé au Panthéon une semaine après son décès

Le théorème « japonais » de CARNOT

Énoncé

Théorème « japonais » de CARNOT. Dans un triangle, la somme des distances orientées du centre du cercle circonscrit aux trois côtés vaut la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.



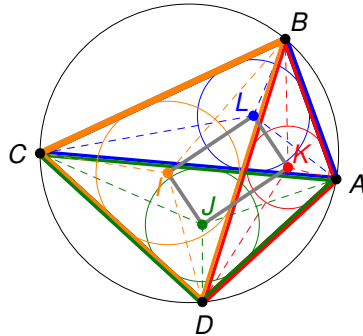
$$a' + b' + c' = R + r$$

(La *distance orientée* d'un point à un côté d'un triangle est sa distance si le point est dans le même demi-plan que le sommet opposé à ce côté, et l'opposé de cette distance dans le cas contraire.)

Le théorème « japonais » de CARNOT

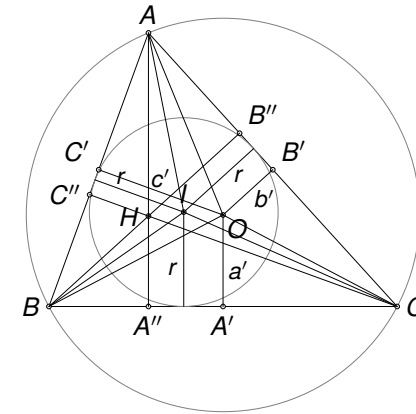
Pourquoi ce nom ? (1)

Proposition. Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si les centres des cercles inscrits aux quatre triangles déterminés par deux côtés adjacents et une diagonale sont les sommets d'un rectangle.



Le théorème « japonais » de CARNOT

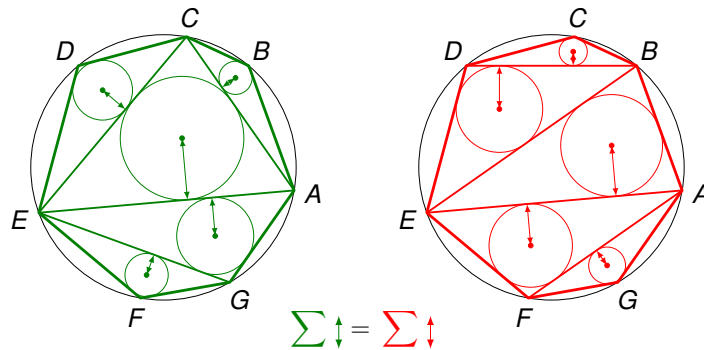
Démonstration



Le théorème « japonais » de CARNOT

Pourquoi ce nom ? (2)

Théorème « japonais ». Un polygone convexe est inscriptible si et seulement si la somme des rayons des cercles inscrits aux triangles formant une triangulation du polygone est indépendante de la triangulation choisie.



$$\sum \uparrow = \sum \downarrow$$

Le théorème de CARNOT des perpendiculaires

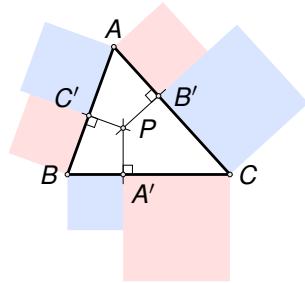
Le théorème de CARNOT des perpendiculaires

Énoncé

Théorème de CARNOT des perpendiculaires.

Les perpendiculaires élevées en A' , B' et C' resp. aux côtés BC , CA et AB d'un triangle sont concourantes ssi

$$\overline{A'B}^2 + \overline{B'C}^2 + \overline{C'A}^2 = \overline{A'C}^2 + \overline{B'A}^2 + \overline{C'B}^2.$$



N.B. : Côté désigne ici la droite.

Le théorème de CARNOT de la conique

Le théorème de CARNOT des perpendiculaires

Cas particuliers

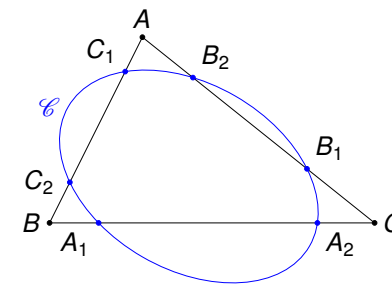
- Ce théorème généralise celui de PYTHAGORE.
- On en déduit le concours des médiatrices.

Le théorème de CARNOT de la conique

Théorème de CARNOT de la conique. Soit six points A_1 et A_2 , B_1 et B_2 , C_1 et C_2 situés respectivement sur les côtés BC , CA et AB d'un triangle, distincts des sommets.

Ces six points appartiennent à une même conique ssi

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} = 1.$$



Le théorème de CARNOT de la conique

Applications

Proposition. Soit P_1 et P_2 dans le plan d'un triangle ABC . On note A_k (resp. B_k, C_k) le point d'intersection de AP_k (resp. BP_k, CP_k) et de BC (resp. CA, AB). Les six points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2 appartiennent à une conique.

Proposition. Soit P un point du plan d'un triangle ABC . On note A' (resp. B', C') le point d'intersection de AP (resp. BP, CP) et de BC (resp. CA, AB). Il existe une conique tangente à AB en C' , à BC en A' et à CA en B' .

Rendons à CARNOT...

Alors, lequel des trois CARNOT cités est l'auteur

- ▶ Du théorème « japonais » ?
- ▶ Du théorème des perpendiculaires ?
- ▶ Du théorème de la conique ?

En vérité, ils sont l'un comme l'autre de

Lazare CARNOT,

qui est le seul des trois à avoir eu une véritable activité mathématique.

Et la réponse à la question